ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Τόμος 2ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κωνσταντίνος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Θωμαΐδης Ιωάννης
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος
Μέτης Στέφανος, Μπρουχούτας Κων/νος
Πολύζος Γεώργιος

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

Αδαμόπουλος Λεωνίδας

• Επίτιμος Σύμβουλος του Π.Ι.

Δακτυλογράφηση: Γαρδέρη Ρόζα

Σχήματα: Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ
Τόμος 2ος

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης
Μέτης Στέφανος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης
Μπρουχούτας Κων/νος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης
Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Πολύζος Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια
του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα
του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

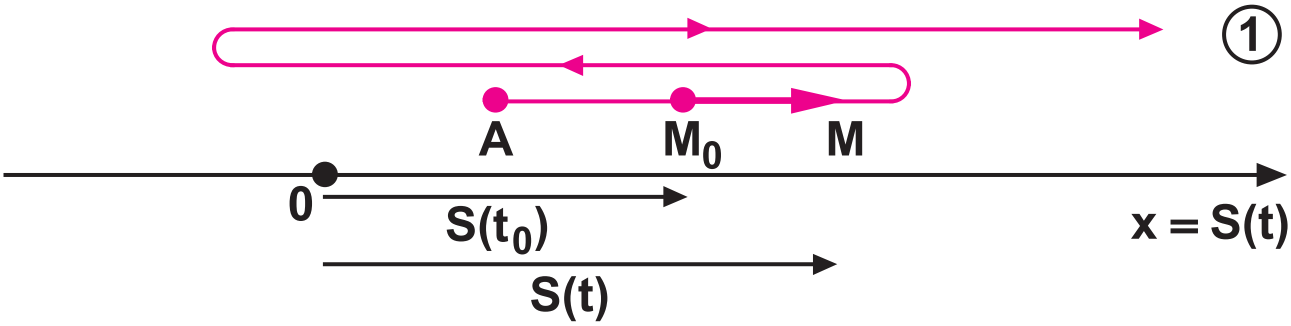
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Στιγμιαία ταχύτητα

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t.



Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κάποια χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και ότι μετά από παρέλευση χρόνου h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, βρίσκεται στη θέση M. (Σχ. 1). Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $S(t) - S(t_0)$. Άρα, **η μέση ταχύτητα** του κινητού σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι

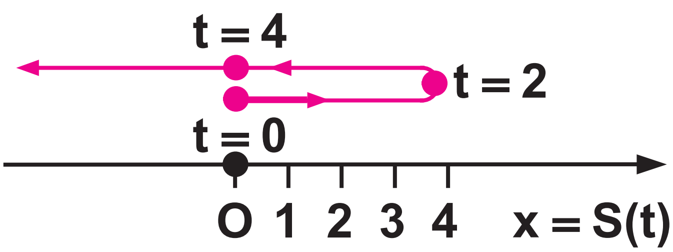
$$\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}.$$

Όσο το t είναι πλησιέστερα στο t_0, τόσο η μέση ταχύτητα του κινητού δίνει με καλύτερη προσέγγιση το ρυθμό αλλαγής της θέσης του κινητού κοντά στο t_0.
Για το λόγο αυτό το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0, το ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $\upsilon(t_0)$. Δηλαδή:

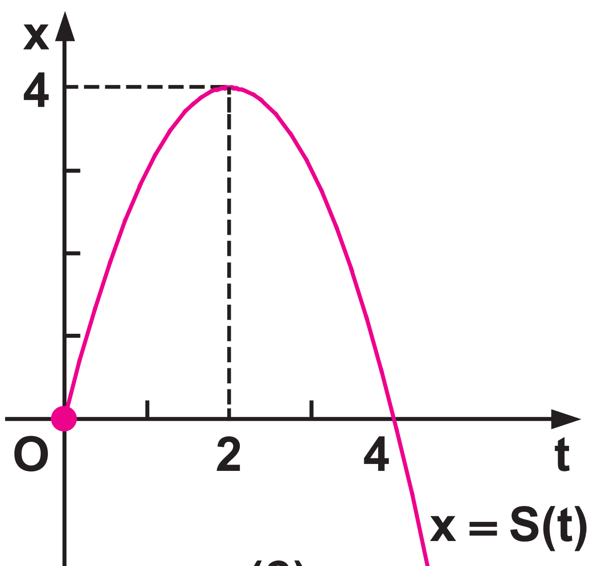
$$\upsilon(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}.$$

Για παράδειγμα, αν $S(t) = -t^2 + 4t$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού (Σχ.2β),

2



(α)



(β)

τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ και $t_3 = 3$ είναι αντιστοίχως:

- $$\upsilon(1) = \lim_{t\to 1}\frac{S(t)-S(1)}{t-1} = \lim_{t\to 1}\frac{-t^2+4t-3}{t-1} =$$
$$= \lim_{t\to 1}\frac{-(t-1)(t-3)}{t-1} = 2$$

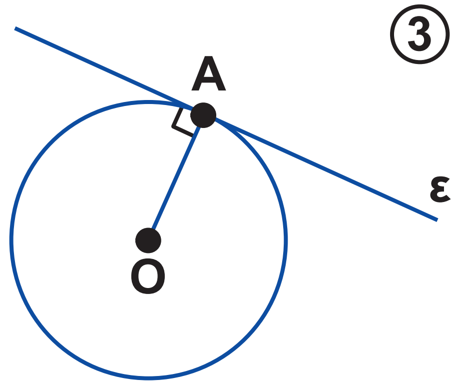
- $$\upsilon(2) = \lim_{t\to 2}\frac{S(t)-S(2)}{t-2} = \lim_{t\to 2}\frac{-t^2+4t-4}{t-2} =$$
$$= \lim_{t\to 2}\frac{-(t-2)(t-2)}{t-2} = 0$$

- $$\upsilon(3) = \lim_{t\to 3}\frac{S(t)-S(3)}{t-3} = \lim_{t\to 3}\frac{-t^2+4t-3}{t-3} =$$
$$= \lim_{t\to 3}\frac{-(t-1)(t-3)}{t-3} = -2.$$

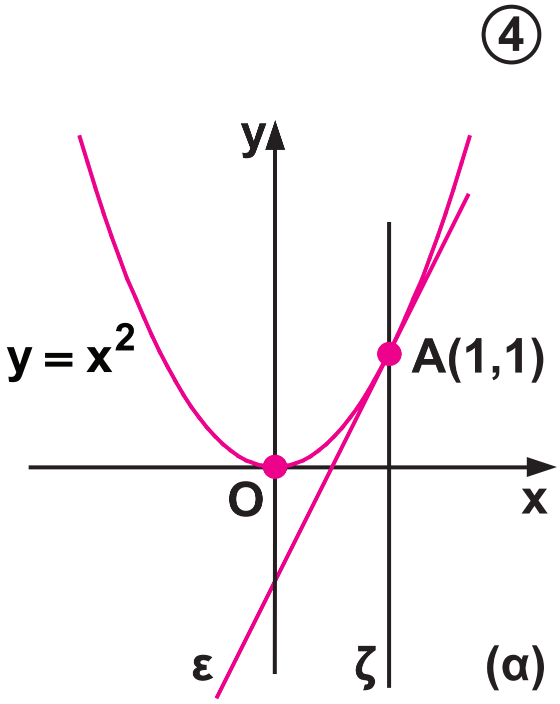
ΣΧΟΛΙΟ

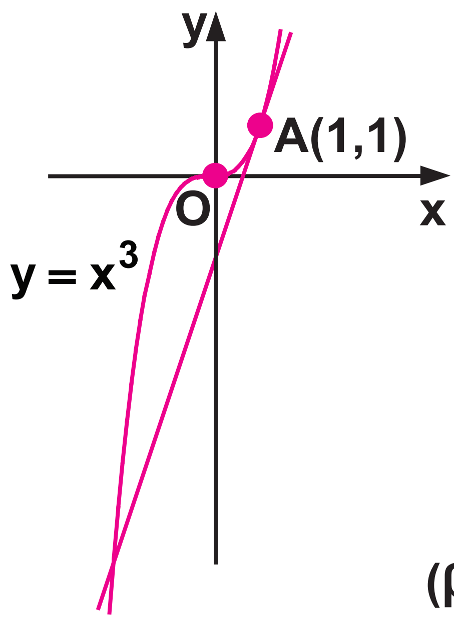
Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} > 0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} < 0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0) \leq 0$.

Πρόβλημα εφαπτομένης



Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του Α ονομάζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο, το Α. Ο ορισμός αυτός δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη, γιατί, με έναν τέτοιο ορισμό η παραβολή $y = x^2$ θα είχε στο σημείο Α(1, 1) δύο εφαπτόμενες ε και ζ (Σχ. 4α), ενώ η $y = x^3$ δεν θα είχε στο σημείο Α(1,1) καμία εφαπτομένη (Σχ. 4β).



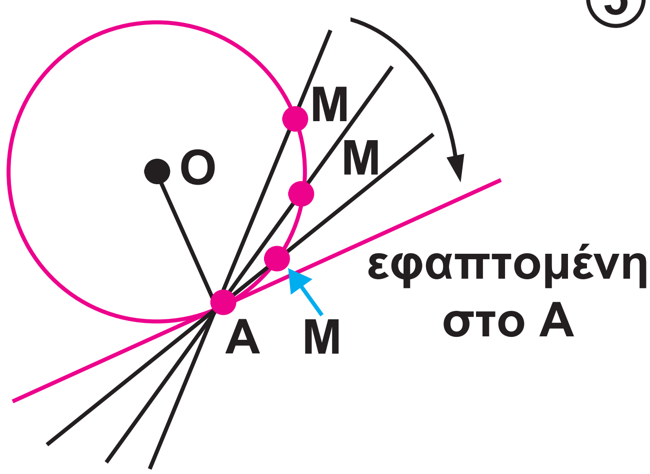


(β)

Επομένως, πρέπει να αναζητήσουμε έναν άλλον ορισμό της εφαπτομένης του κύκλου, ο οποίος να μπορεί να γενικευτεί για όλες τις καμπύλες.

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα άλλο σημείο Μ του κύκλου (Σχ. 5). Τα σημεία Α, Μ ορίζουν μια τέμνουσα του κύκλου, την ευθεία ΑΜ. Καθώς το σημείο Μ, κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει στο Α, η τέμνουσα ΑΜ φαίνεται να έχει ως “οριακή θέση” την εφαπτομένη του κύκλου στο Α.

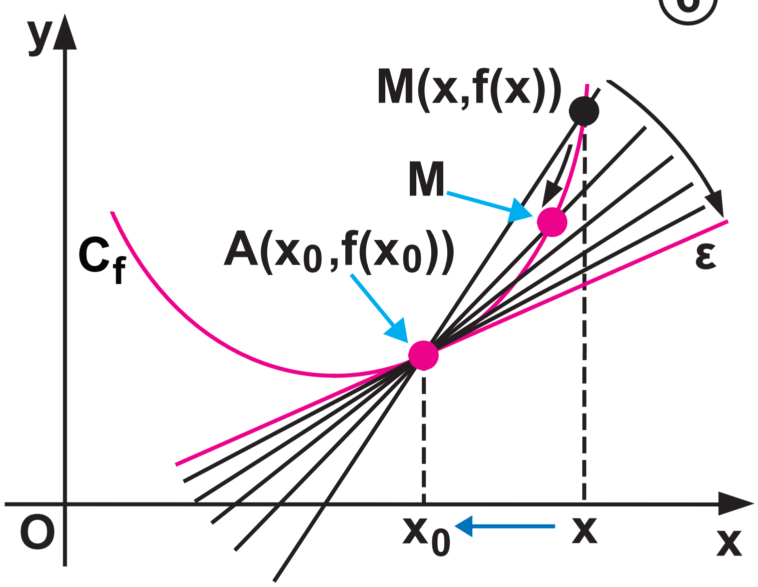
5



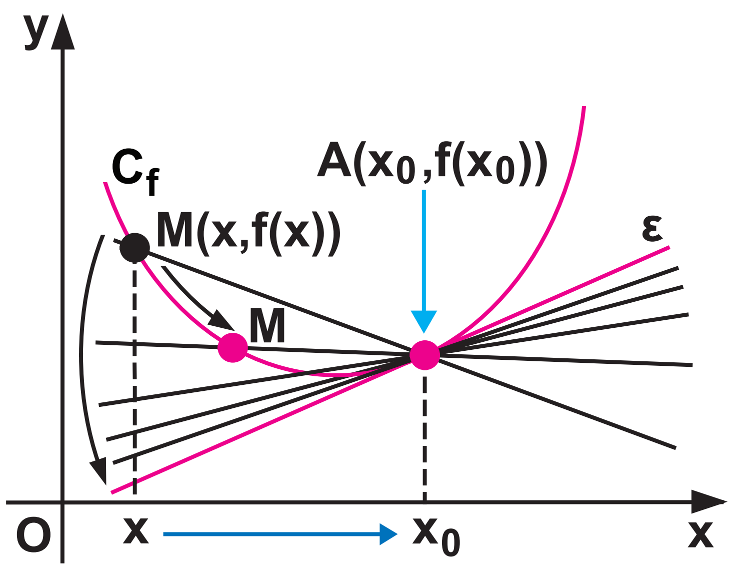
Τη διαπίστωση αυτή θα δούμε, τώρα, πως μπορούμε να την αξιοποιήσουμε για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.

● Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

⑥



(α)



(β)

Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x, f(x))$, $x \neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία AM που ορίζουν τα σημεία A και M, παρατηρούμε ότι:

Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$, η τέμνουσα AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε (Σχ. 6α). Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0 με $x < x_0$ (Σχ. 6β). Την οριακή θέση της AM θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A. Επειδή η κλίση της τέμνουσας

AM είναι ίση με $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, είναι λογικό να αναμένουμε

ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Έτσι δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0),$$

όπου

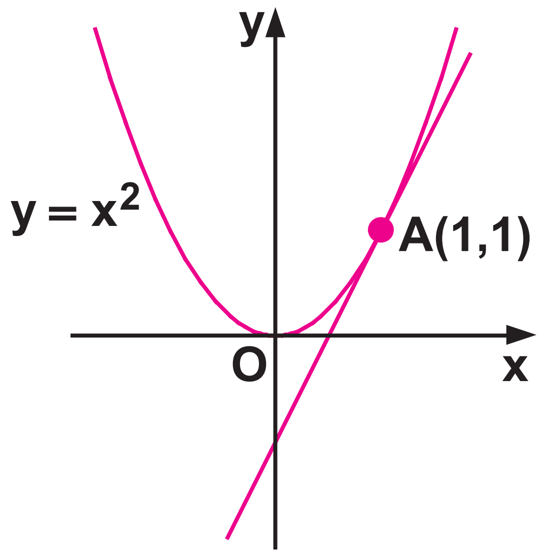
$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο της $A(1,1)$. Επειδή

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2,$$

7



ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,1)$. Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$ και εξίσωση $y - 1 = 2(x - 1)$.

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Στα προηγούμενα, οι ορισμοί της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού και της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης μας οδήγησαν σε ένα όριο της μορφής

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για την ιδιαίτερη περίπτωση που το παραπάνω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με **$f'(x_0)$**. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^2+1$, τότε στο $x_0=1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Επομένως, $f'(1)=2$.

Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

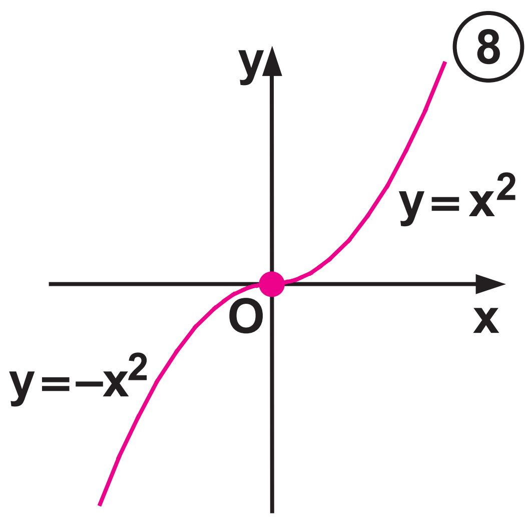
Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange. Είναι φανερό ότι, αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:

> Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια
>
> $$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
>
> και είναι ίσα.

Για παράδειγμα,

— η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & ,\quad x<0\\ x^2 & ,\quad x\geq 0\end{cases}$$



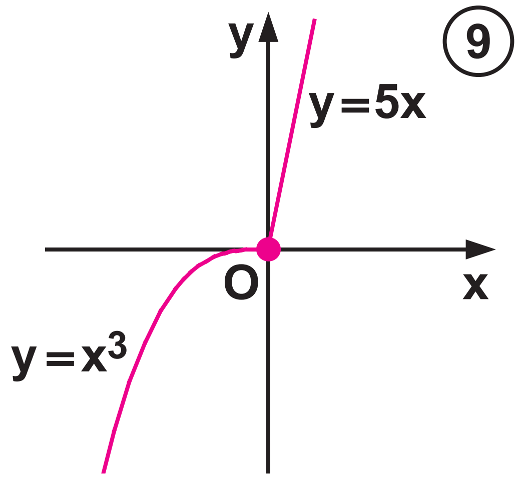
είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$, αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-0}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

ενώ



— η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<0 \\ 5x & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-0}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x-0}{x}=5.$$

ΣΧΟΛΙΑ

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

• Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι

$$\upsilon(t_0)=S'(t_0).$$

• Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι

$$\lambda=f'(x_0),$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο Α** ή **κλίση της στο x_0**.

Κατακόρυφη εφαπτομένη

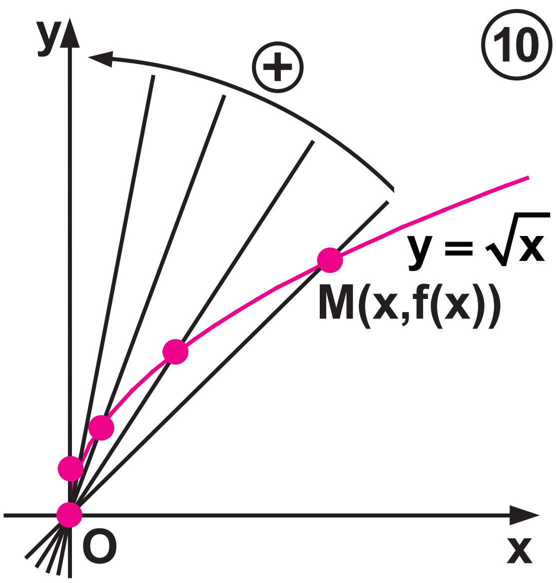
• Ας δούμε, τώρα, αν μπορούμε να ορίσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνεχούς συνάρτησης f σ' ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, όταν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

— Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση

$f(x) = \sqrt{x}$ (Σχ. 10).

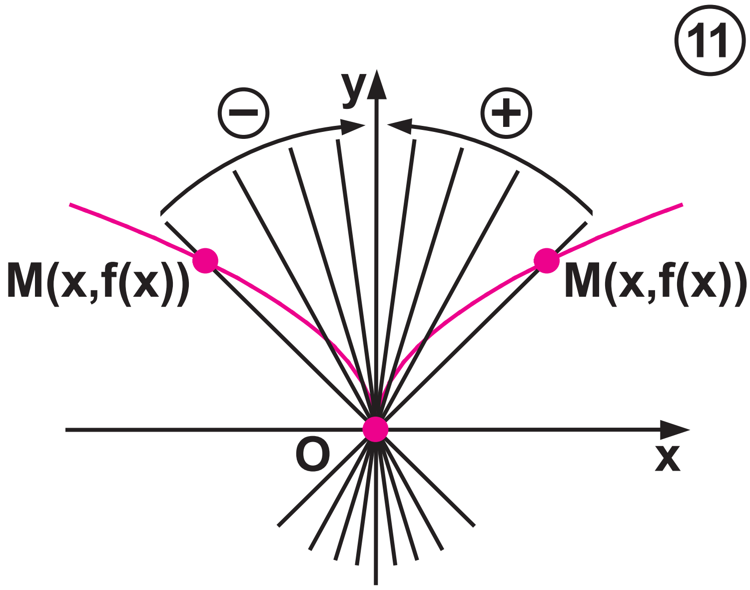
Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$



Παρατηρούμε όμως ότι, αν $M(x, f(x))$, $x \neq 0$, είναι ένα σημείο της C_f, τότε, καθώς το x τείνει στο 0, η τέμνουσα OM φαίνεται να παίρνει ως οριακή θέση την κατακόρυφη ευθεία που περνάει από το O, δηλαδή τείνει να συμπέσει με τον άξονα $y'y$. Στην περίπτωση αυτή ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $O(0,0)$ ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία $x = 0$.

— Έστω τώρα και η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}$. (Σχ. 11)



Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Παρατηρούμε όμως και εδώ ότι, αν $M(x, f(x))$, $x \neq 0$, είναι ένα σημείο της C_f, τότε, καθώς το x τείνει στο 0, η τέμνουσα ΟΜ τείνει να συμπέσει με τον άξονα $y'y$. Στην περίπτωση αυτή ως εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$ ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία $x = 0$.
Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο x_0 και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ (ή $-\infty$)

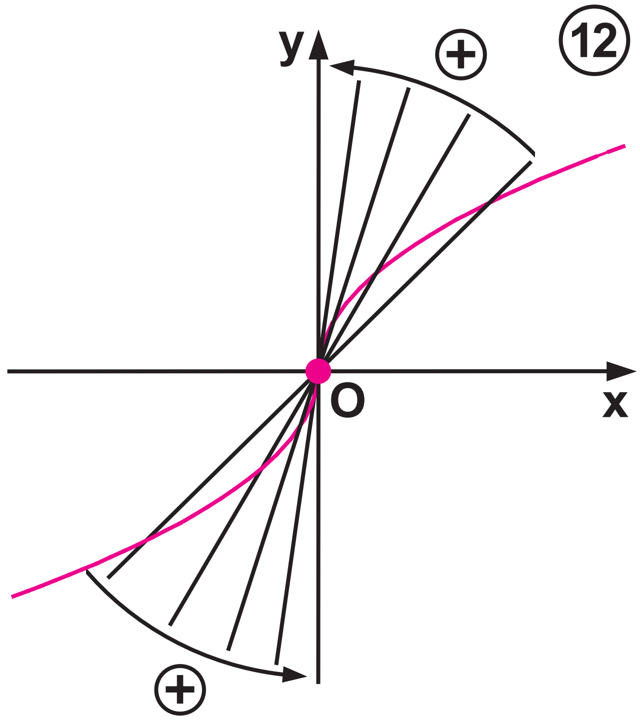
β) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$,

γ) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$,

τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$.

Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}\ , & x<0\\ \sqrt{x}\ , & x\geq 0\end{cases} \qquad (Σχ.\ 12)$$

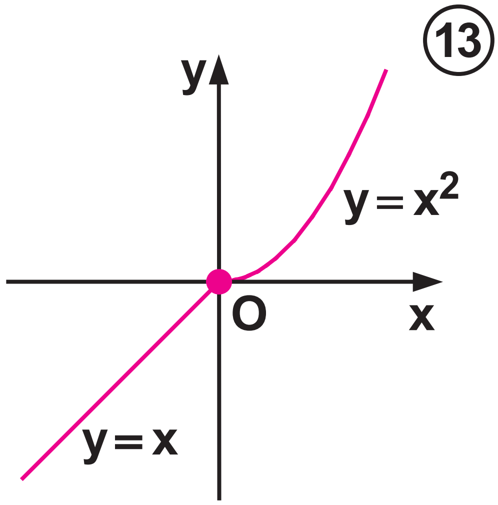


δέχεται στο σημείο της Ο(0,0) κατακόρυφη εφαπτομένη, την $x=0$, αφού είναι συνεχής στο 0 και ισχύει

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

● Αν μια συνάρτηση f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και **δεν** ισχύουν οι προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού, τότε **δεν ορίζουμε** εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.



Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad x \geq 0 \end{cases},$$

δεν έχει εφαπτομένη στο O(0,0), αφού

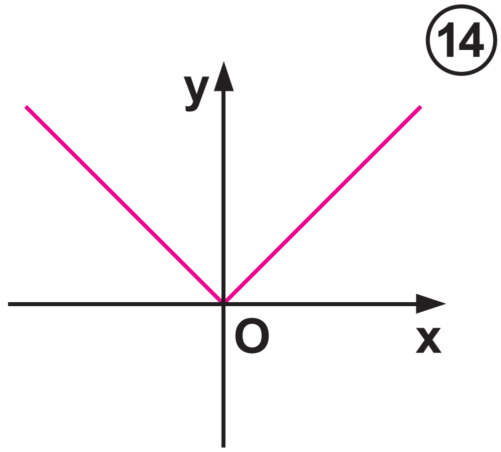
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

Παράγωγος και συνέχεια

Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1, \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1.$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε θα είναι και συνεχής στο x_0, δηλαδή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

> Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+\alpha^2 & , \quad x<0 \\ x^3+\alpha x+1 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$ **είναι:**

i) συνεχής στο $x_0=0$; ii) παραγωγίσιμη στο $x_0=0$;

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=-1.$$

ii) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- **Αν $\alpha \neq 1,-1$, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής και επομένως δεν είναι παραγωγίσιμη.**
- **Αν $\alpha=1$, η συνάρτηση γράφεται**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & , \quad x<0 \\ x^3+x+1 & , \quad x\geq 0 \end{cases}.$$

— Για $x < 0$, έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2+x+1-1}{x}=\frac{x(x+1)}{x}=x+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

— Για $x > 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3+x+1-1}{x}=\frac{x(x^2+1)}{x}=x^2+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και επομένως, για $\alpha = 1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

• Αν $\alpha = -1$, η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & , \quad x<0 \\ x^3-x+1 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

— Για $x < 0$, έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2+x+1-1}{x}=\frac{x(x+1)}{x}=x+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

— Για $x > 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3-x+1-1}{x}=\frac{x(x^2-1)}{x}=x^2-1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και επομένως, για $\alpha = -1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν

   i) $f(x)=x^2+1,\ x_0=0$ ii) $f(x)=\frac{1}{x^2},\ x_0=1$

   iii) $f(x)=\eta\mu^2 x,\ x_0=0.$

2. Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν

i) $f(x)=x|x|, \quad x_0=0$ ii) $f(x)=|x-1|, \quad x_0=1$

iii) $f(x)=|x^2-3x|, \quad x_0=1$

iv) $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & , \quad x<0 \\ x+1 & , \quad x\geq 0 \end{cases}, \quad x_0=0.$

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

i) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x<0 \\ x^3 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$, αν $x_0=0$

ii) $f(x)=|x-1|+1$, αν $x_0=1$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f (αν ορίζεται) στο $A(x_0, f(x_0))$ για κάθε μία από τις συναρτήσεις των ασκήσεων 1 και 2.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=2-x+x\eta\mu|x|$ στο σημείο $x_0=0$.

2. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(1+h)=2+3h+$ $+3h^2+h^3$, για κάθε $h\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

   i) $f(1)=2$ ii) $f'(1)=3$.

3. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & , \quad x<0\\ \eta\mu x+1 & , \quad x\geq 0\end{cases}$, να αποδείξετε ότι

   ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο Α(0,1) και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

4. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

   $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$ στο $x_0=0$.

5. Αν $x+1\leq f(x)\leq x^2+x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

   i) $f(0)=1$

   ii) $1\geq \dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq x+1$, για $x<0$ και

$$1 \le \frac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1, \text{ για } x>0$$

iii) $f'(0)=1$.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\eta\mu^2 x - x^4 \le xf(x) \le \eta\mu^2 x + x^4$$

να αποδείξετε ότι

i) $f(0)=0$ ii) $f(0)=1$.

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$, να αποδείξετε ότι:

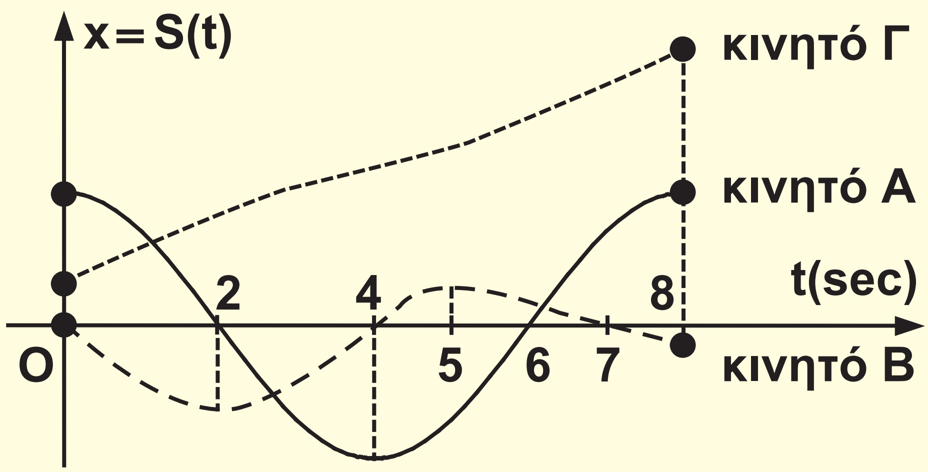
i) $f(0)=0$ ii) $f'(0)=4$.

8. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

i) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$

ii) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)$.

9. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα x′x στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 8 sec. Να βρείτε:



i) Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;

ii) Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;

iii) Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή t = 2 sec, ποιο τη χρονική στιγμή t = 4 sec και ποιο τη χρονική στιγμή t = 5 sec;

iv) Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0 sec έως 4 sec;

v) Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;

vi) Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

• Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι:

— Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

— Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

— Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

• Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\to R \\ x &\to f'(x), \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f. Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”.

Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος** της f, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]', \ \nu \geq 3.$$

Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης, με βάση τον ορισμό που δώσαμε, δεν είναι πάντα εύκολη. Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγώγισης συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά).

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

- Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή

$$\boxed{(c)' = 0}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$. ■

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή

$$\boxed{(x)'=1}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

δηλαδή $(x)'=1$. ■

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}-\{0,1\}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=$$

$$=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=$$

$$=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$. ■

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=$$

$$=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η $f(x)=\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. ■

● Έστω συνάρτηση $f(x)=ημx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=συνx$, δηλαδή

$$\boxed{(ημx)'=συνx}$$

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{ημ(x+h)-ημx}{h}=$$

$$=\frac{ημx\cdot συνh+συνx\cdot ημh-ημx}{h}=$$

$$=ημx\cdot\frac{(συνh-1)}{h}+συνx\cdot\frac{ημh}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{ημh}{h}=1 \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{συνh-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=ημx\cdot 0+συνx\cdot 1=συνx$$

Δηλαδή, $(ημx)'=συνx$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=συνx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=-ημx$, δηλαδή

$$\boxed{(συνx)'=-ημx}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\text{συν}(x+h)-\text{συν}x}{h} =$$

$$= \frac{\text{συν}x \cdot \text{συν}h - \text{ημ}x \cdot \text{ημ}h - \text{συν}x}{h} =$$

$$= \text{συν}x \cdot \frac{\text{συν}h-1}{h} - \text{ημ}x \cdot \frac{\text{ημ}h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\text{συν}x \cdot \frac{\text{συν}h-1}{h}\right) - \lim_{h\to 0}\left(\text{ημ}x \cdot \frac{\text{ημ}h}{h}\right) =$$

$$= \text{συν}x \cdot 0 - \text{ημ}x \cdot 1 = -\text{ημ}x.$$

Δηλαδή, $(\text{συν}x)' = -\,\text{ημ}x$. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}x-1}{x} = 0,$$

τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = \text{ημ}x$, $g(x) = \text{συν}x$ είναι η παράγωγος στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων f, g αντιστοίχως, αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}x - \text{ημ}0}{x-0} = f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 0}{x-0}=g'(0).$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=e^x$, δηλαδή

$$\boxed{(e^x)'=e^x}$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\ln x$, στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

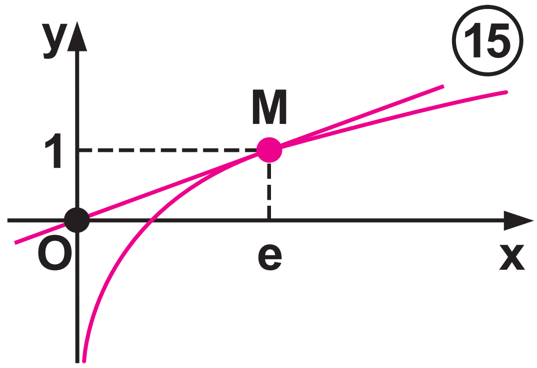
Επειδή $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f σε ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

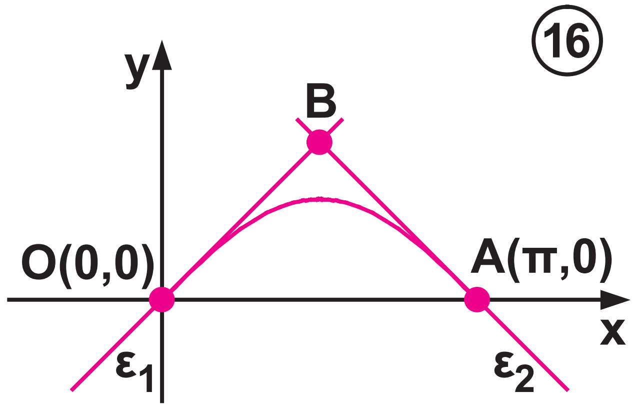
Η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0, 0), αν και μόνο αν

$$0-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(0-x_0)\Leftrightarrow \ln x_0=1\Leftrightarrow x_0=e.$$

Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το M(e,1).



2. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=$ ημx στα σημεία O(0,0) και A(π,0) αντίστοιχως.
Να βρεθούν:



i) Οι εξισώσεις των ε_1 και ε_2

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ε_1, ε_2 και ο άξονας των x.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$, είναι $f'(0) = 1$ και $f'(\pi) = -1$ οπότε οι ε_1, ε_2 έχουν εξισώσεις

$$y = x \qquad \text{και} \qquad y = -(x-\pi)$$

αντιστοίχως.

ii) Αν λύσουμε το σύστημα των παραπάνω δύο εξισώσεων βρίσκουμε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται

στο σημείο $B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα, το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδόν $E = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i) $f(x) = x^4$, $x_0 = -1$ ii) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$

iii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$ iv) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$

v) $f(x) = e^x$, $x_0 = \ln 2$.

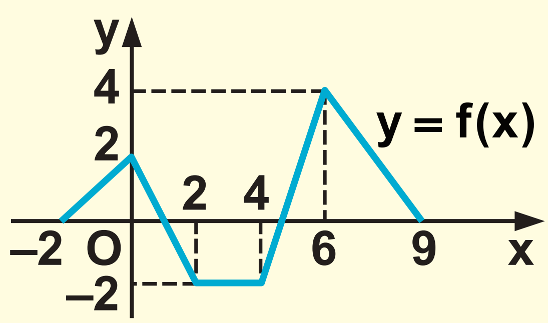
2. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<1 \\ \sqrt{x} & , \quad x\geq 1 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x & , \quad x<0 \\ x & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

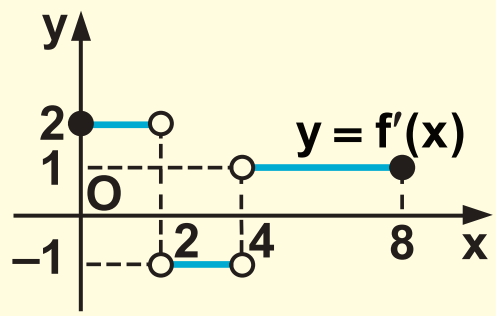
iii) $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<2 \\ x^4 & , \quad x\geq 2 \end{cases}$ iv) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\leq \dfrac{2}{3} \\ x^3 & , \quad x>\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y=x^2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3$;

4. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



5. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, με $f(0)=0$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα.



Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} ημx &, \ x<π \\ αx+β &, \ x \geq π \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=π$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A(ξ, f(ξ))$, $ξ \neq 0$ της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(ξ, f(ξ))$ και $B(-ξ, 0)$ εφάπτεται της C_f στο Α.

3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(α, α^3)$, $α \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο Ν εκτός του Μ. Στο σημείο Ν η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο Μ.

4. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(ξ, \dfrac{1}{ξ}\right)$. Αν Α, Β είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι
   i) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.
   ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $ξ \in \mathbb{R}^*$.

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0). \qquad \blacksquare$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ’ ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, \ldots, f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_k'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}(\eta\mu x + x^2 + e^x + 3)' &= (\eta\mu x)' + (x^2)' + (e^x)' + (3)' \\ &= \sigma\upsilon\nu x + 2x + e^x.\end{aligned}$$

Παράγωγος γινομένου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} .$$

Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ’ ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(e^x \ln x)' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}, \; x > 0.$$

Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$(f(x)g(x)h(x))' = [(f(x)g(x))\cdot h(x)]' =$$

$$= (f(x)g(x))'\cdot h(x) + (f(x)g(x))\cdot h'(x) =$$

$$= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) =$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(\sqrt{x}\cdot ημx\cdot \ln x)' = (\sqrt{x})'\cdot ημx\cdot \ln x +$$

$$+\sqrt{x}\cdot (ημx)'\cdot \ln x + \sqrt{x}\cdot ημx\cdot (\ln x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}ημx\cdot \ln x + \sqrt{x}\cdot συνx\cdot \ln x + \sqrt{x}\cdot ημx\cdot \frac{1}{x} \qquad x > 0.$$

Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}^*$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:

$$\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$$

Για παράδειγμα,

$$(6x^3)' = 6(x^3)' = 6\cdot 3x^2 = 18x^2.$$

Παράγωγος πηλίκου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Η απόδειξη παραλείπεται.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x_0) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Για παράδειγμα,

$$\left(\frac{x^2}{5x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(5x-1) - x^2(5x-1)'}{(5x-1)^2} = \frac{2x(5x-1) - x^2 \cdot 5}{(5x-1)^2} =$$

$$= \frac{10x^2 - 2x - 5x^2}{(5x-1)^2} = \frac{5x^2 - 2x}{(5x-1)^2}, \quad x \neq \frac{1}{5}.$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες προτάσεις μπορούμε τώρα να βρούμε τις παραγώγους μερικών ακόμη βασικών συναρτήσεων.

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}. \quad \blacksquare$$

Για παράδειγμα,

$$(x^{-4})'=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5},\ x \neq 0.$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu>1$. Επομένως, αν $\kappa \in \mathbb{Z}-\{0,1\}$, τότε

$$\boxed{(x^{\kappa})'=\kappa x^{\kappa-1}.}$$

• Έστω η συνάρτήση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \ \blacksquare$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)' = \frac{(x\ln x)'(x-1) - x\ln x(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} =$$

$$=\frac{x\ln x-\ln x+x-1-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$$

2. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{x+1}$ και $g(x)=x^2-x+1$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο Α(0,1) και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0)=g'(0)$. Έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+1}\right)'=\frac{(1)'(x+1)-1(x+1)'}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

και

$$g'(x)=(x^2-x+1)'=2x-1,$$

οπότε

$$f'(0)=-1 \text{ και } g'(0)=-1.$$

Άρα

$$f'(0)=-1=g'(0).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(0,1) είναι:

$$y-1=-1(x-0)\Leftrightarrow y=-x+1.$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω ότι ζητάμε την παράγωγο της συνάρτησης $y=\eta\mu 2x$, η οποία είναι σύνθεση της $g(x)=2x$ και της

$f(x)=ημx$. Επειδή $ημ2x = 2\,ημx \cdot συνx$, έχουμε

$$(ημ2x)' = (2ημxσυνx)' = 2(ημx)'συνx + 2ημx(συνx)' =$$
$$= 2συν^2x - 2ημ^2x = 2(συν^2x - ημ^2x) =$$
$$= 2συν2x.$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της $y = ημ2x$ δεν είναι η συνάρτηση $y = συν2x$, όπως ίσως θα περίμενε κανείς από τον τύπο $(ημx)' = συνx$. Αυτό εξηγείται με το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $Δ$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(Δ)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $Δ$ και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'.$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.
Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι τα εξής:

• Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1} \quad (1)}$$

Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

• Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ln\alpha$, δηλαδή

$$\boxed{(\alpha^{x})'=\alpha^{x}\ln\alpha}$$

---

(1) Αποδεικνύεται ότι, για $\alpha>1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0=0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u = x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha.$$

• Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

Πράγματι.

— αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Ανακεφαλαιώνοντας, αν η συνάρτηση $u = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε έχουμε:

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(\varepsilon\varphi u)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u} \cdot u'$
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\sigma\varphi u)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 u} \cdot u'$
$(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u \cdot u'$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$

$(\sigma\upsilon\nu u)' = -\,\eta\mu u \cdot u'$	$(\alpha^u)' = \alpha^u \ln\alpha \cdot u'$
$(\ln\lvert u\rvert)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$	

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων**

i) $f(x) = (3x^2+5)^9$ ii) $g(x) = e^{-x^2+1}$

iii) $h(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$.

ΛΥΣΗ

i) Αν θέσουμε $u = 3x^2+5$, τότε η συνάρτηση $y = f(x)$ γράφεται

$$y = u^9,$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} y' = (u^9)' = 9u^8 \cdot u' &= \\ = 9(3x^2+5)^8 \cdot (3x^2+5)' &= \\ = 9(3x^2+5)^8 \cdot 6x &= \\ = 54x(3x^2+5)^8. \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε

ii) $g'(x) = (e^{-x^2+1})' = e^{-x^2+1}(-x^2+1)'$ (θέσαμε $u = -x^2+1$)

$$= e^{-x^2+1}(-2x) = -2xe^{-x^2+1}$$

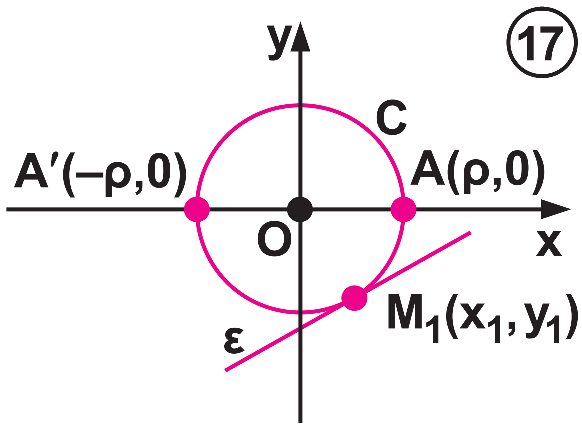
iii) $h'(x) = (\ln(\sqrt{x^2+1}))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot (\sqrt{x^2+1})' =$

(θέσαμε $u = \sqrt{x^2+1}$)

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' =$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}.$$

2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $M_1(x_1, y_1)$.



ΛΥΣΗ

Αν λύσουμε την εξίσωση του κύκλου ως προς y, βρίσκουμε ότι

$$y = \sqrt{\rho^2 - x^2}, \text{ αν } y \geq 0 \text{ και } y = -\sqrt{\rho^2 - x^2}, \text{ αν } y \leq 0.$$

Επομένως, ο κύκλος C αποτελείται από τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f_1(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} \text{ και } f_2(x) = -\sqrt{\rho^2 - x^2}$$

οι οποίες είναι ορισμένες στο κλειστό διάστημα $[-\rho, \rho]$ και παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα $(-\rho, \rho)$. Αν, τώρα, με $y = f(x)$ συμβολίσουμε εκείνη από τις παραπάνω συναρτήσεις στην οποία ανήκει το $M_1(x_1, y_1)$, τότε θα ισχύει

$$\lambda_\varepsilon = f'(x_1) \qquad (1) \qquad \text{και} \qquad x^2 + f^2(x) = \rho^2 \qquad (2)$$

Έτσι, με παραγώγιση και των δύο μελών της (2), έχουμε

$$2x + 2\, f(x)\, f'(x) = 0$$

οπότε, για $x = x_1$, θα ισχύει

$$x_1 + f(x_1)\, f'(x_1) = 0.$$

Έτσι, λόγω της (1) θα έχουμε

$$x_1 + y_1 \cdot \lambda_\varepsilon = 0$$

οπότε, για $y_1 \neq 0$, θα είναι

$$\lambda_\varepsilon = \frac{-x_1}{y_1}.$$

Άρα, η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

η οποία γράφεται διαδοχικά:

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2, \qquad (3)$$

αφού $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$.

Αν $y_1 = 0$, που συμβαίνει όταν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι το $A(\rho,0)$ ή το $A'(-\rho,0)$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία αυτά είναι οι κατακόρυφες ευθείες

$$x = \rho \quad \text{και} \quad x = -\rho$$

αντιστοίχως. Και οι δυο αυτές εξισώσεις δίνονται από τον παραπάνω τύπο (3) για $(x_1, y_1) = (\rho, 0)$ και $(x_1, y_1) = (-\rho, 0)$ αντιστοίχως.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης οποιασδήποτε άλλης κωνικής τομής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

   i) $f(x) = x^7 - x^4 + 6x - 1$

   ii) $f(x) = 2x^3 + \ln x - \sqrt{3}$

   iii) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x$

   iv) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\eta\mu x + \ln 3$.

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=(x^2-1)(x-3)$ ii) $f(x)=e^x ημx$

iii) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ iv) $f(x)=\dfrac{ημx+συνx}{1+συνx}$

v) $f(x)=x^2 ημxσυνx$.

3. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln x}$ ii) $f(x)=εφx + σφx$

iii) $f(x)=\dfrac{ημx}{e^x}$ iv) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}$.

4. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3x, & x<0 \\ 12\sqrt{x}+6x, & x\geq 0 \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases} x^2+ημx, & x\leq 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$.

5. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα των x, όταν

i) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ii) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ iii) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

6. Αν $f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$,

να βρείτε τις συναρτήσεις f', g'. Ισχύει $f' = g'$;

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$ στο κοινό σημείο τους Α(1,1), είναι κάθετες.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η κλίση της C_f στο σημείο της Α(0,1) είναι ίση με $\frac{1}{2}$.

9. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 5$, στα οποία η εφαπτομένη είναι:

i) παράλληλη προς την ευθεία $y = 9x + 1$

ii) κάθετη προς την ευθεία $y = -x$.

10. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ η οποία άγεται από το σημείο $A(0,-1)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f, διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y=x$ στην αρχή των αξόνων.

12. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=(3x^4+4x^3)^{-2}$ ii) $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{2}}$

iii) $f(x)=\eta\mu\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ iv) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}-x\right)$

v) $f(x)=e^{-x^2}$.

13. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i) $f(x)=x^2\sqrt{1+x^3}$, $x_0=2$

ii) $f(x)=(2x)^{\frac{1}{3}}+(2x)^{\frac{2}{3}}$, $x_0=4$

iii) $f(x)=x^3\eta\mu^3(\pi x)$, $x_0=\dfrac{1}{6}$

iv) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2-x}$, $x_0=3$.

14. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^{\ln x}$ ii) $f(x)=2^{5x-3}$

iii) $f(x)=(\ln x)^{x},\ x>1$ iv) $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

15. Αν $f(x)=\eta\mu^{2}x$, να αποδείξετε ότι $f''(x)+4f(x)=2$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=x^{2}-x+1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.

2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3x-2$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^{3}$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x^{2}+\beta x+2$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x}$ και $g(x)=-x^{2}-x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στην C_g.

5. Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε $f(0)=4$, $f'(-1)=2$, $f''(2)=4$ και $f^{(3)}(1)=6$.

6. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο f δεύτερου βαθμού του οποίου η γραφική παράσταση να εφάπτεται των ευθειών $y=x+1$ και $y=3x-1$ στα σημεία A(0,1) και B(1,2) αντιστοίχως.

7. Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)$

ii) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^{x}f(x)-e^{\alpha}f(\alpha)}{x-\alpha}=e^{\alpha}(f(\alpha)+f'(\alpha))$.

8. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=\eta\mu 2x-2\eta\mu^{2}x,\ x\in[0,2\pi],$$

στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x.

9. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x)=\sqrt[3]{x^{2}}$, ii) $f(x)=\sqrt[3]{x^{4}}$

και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο O(0,0) σε καθεμια περίπτωση χωριστά.

10. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x)=f(x^2+x+1)-1$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε οτι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

11. Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$, για την οποία ισχύει

$f(\eta\mu x)=e^x \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

i) Να βρείτε την $f'(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, ορίσαμε τη στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ως το όριο

$$\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=S'(t_0).$$

Το όριο αυτό το λέμε και **ρυθμό μεταβολής** της τετμημένης S του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Γενικά,

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $υ'(t_0)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $υ'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με **$α(t_0)$**. Είναι δηλαδή

$$α(t_0) = υ'(t_0) = S''(t_0).$$

Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής Κ, η είσπραξη Ε και το κέρδος Ρ εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους Κ ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο x_0**. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο x_0** και **οριακό κέρδος στο x_0**.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ένα βότσαλο που ρίχνεται σε μία λίμνη προκαλεί κυκλικό κυματισμό. Μία συσκευή μέτρησης δείχνει ότι τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα r του κυματισμού είναι 50 cm, ο ρυθμός μεταβολής της r είναι 20 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε που περικλείεται από το κυκλικό κύμα, τη χρονική στιγμή t_0.**

ΛΥΣΗ

Επειδή $E = \pi \cdot r^2$ και η ακτίνα r είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε

$$E(t) = \pi r^2(t),$$

οπότε

$$E'(t) = 2\pi r(t) \cdot r'(t).$$

Επομένως,

$$E'(t_0) = 2\pi r(t_0) \cdot r'(t_0) = 2\pi \cdot 50 \cdot 20 = 2000\pi \ (cm^2/sec).$$

2. **Αν το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι K(x) και η συνολική είσπραξη από την πώλησή τους είναι E(x), τότε $P(x) = E(x) - K(x)$ είναι το συνολικό κέρδος και $K_\mu(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ είναι το μέσο κόστος.**

i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης είναι ίσοι.

ii) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

ΛΥΣΗ

i) Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι

$$P'(x) = E'(x) - K'(x).$$

Επομένως,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x).$$

ii) Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι

$$K'_{\mu}(x) = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}.$$

Επομένως

$$K'_{\mu}(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) \cdot x - K(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = K_{\mu}(x).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας Ε και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$sec.

   (Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

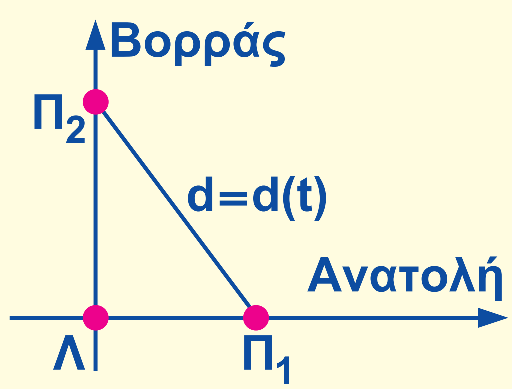
2. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 100 cm^3/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9 cm;

3. Το κόστος παραγωγής, Κ(x), και η τιμή πώλησης, Π(x), x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις

   $$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000 \text{ και } \Pi(x) = 420x$$

   αντιστοίχως. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους, $P(x) = \Pi(x) - K(x)$, είναι θετικός.

4. Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15 km/h και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα 20 km/h.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των $Π_1$ και $Π_2$

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (Π_1Π_2)$ των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

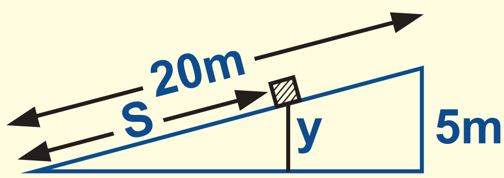
5. Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10\ cm^2/sec$, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r = 85$ cm.

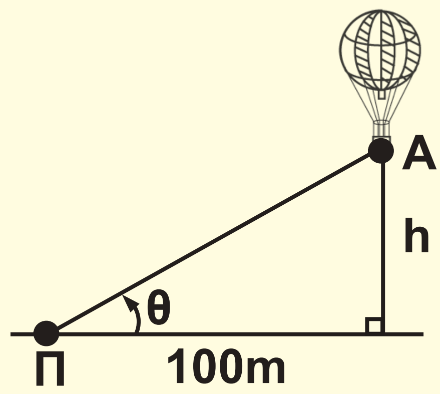
2. Έστω Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Τ, όταν $x = 5$cm.

3. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3 m/s.

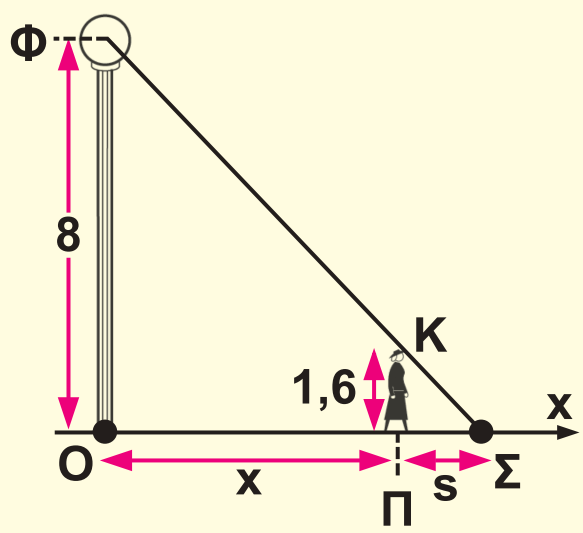


Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y.

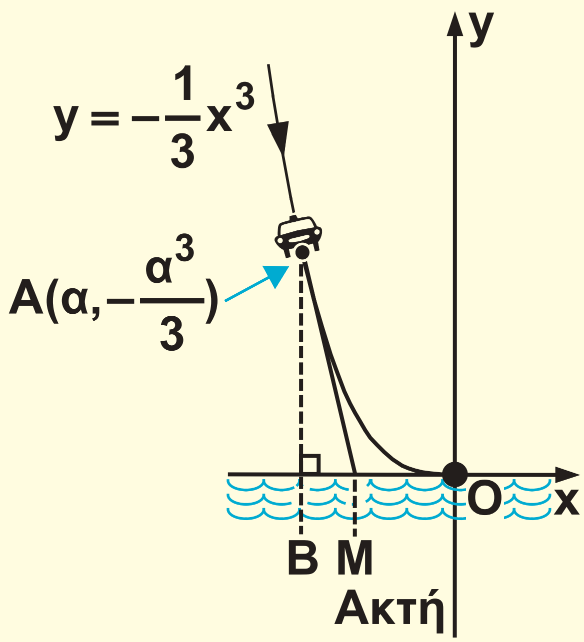
4. Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100 m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50 m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλλόνι βρίσκεται σε ύψος 100 m.



5. Μία γυναίκα ύψους 1,60 m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8 m με ταχύτητα 0,8 m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;



6. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα).

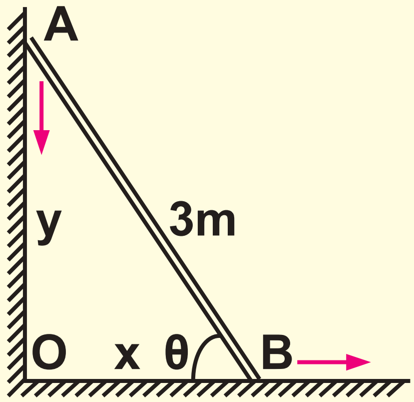


Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\alpha(t)$$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

7. **Μία σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m, να βρείτε:**
   i) **Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).**
   ii) **Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.**



8. **Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α.**

2.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού που είναι γνωστό ως **Θεώρημα Μέσης Τιμής**. Αρχικά διατυπώνουμε το Θεώρημα του Rolle, το οποίο είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και στη συνέχεια διατυπώνουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής, το οποίο αποδεικνύεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Rolle.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

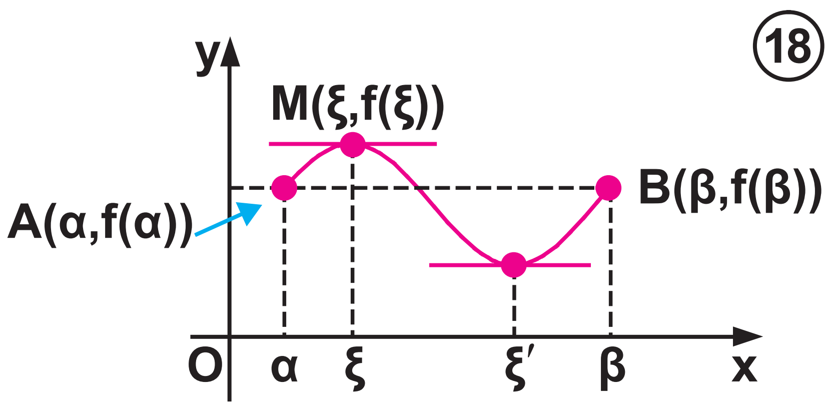
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

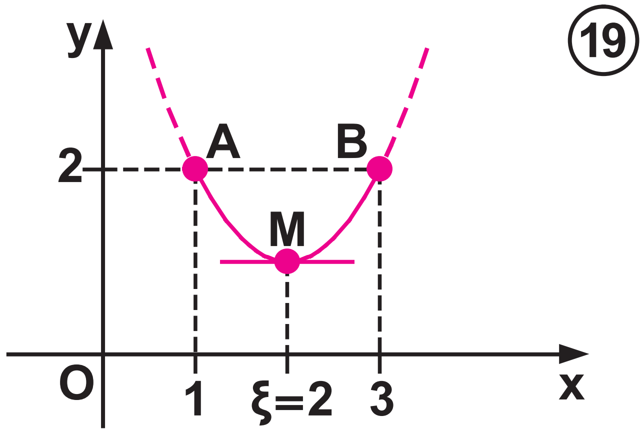
$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$f(x) = x^2 - 4x + 5,\ x \in [1,3]$. (Σχ. 19)



Επειδή η f είναι συνεχής στο [1,3], παραγωγίσιμη στο (1,3), με $f'(x) = 2x - 4$ και $f(1) = 2 = f(3)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (1,3)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Για την εύρεση του αριθμού ξ, έχουμε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 4 = 0 \Leftrightarrow \xi = 2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

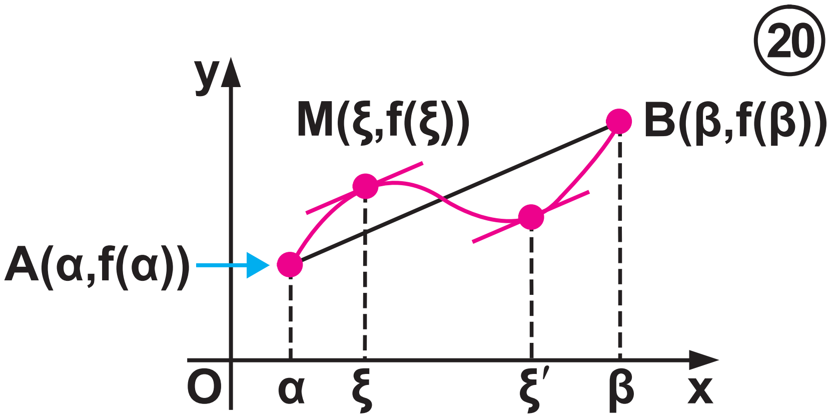
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

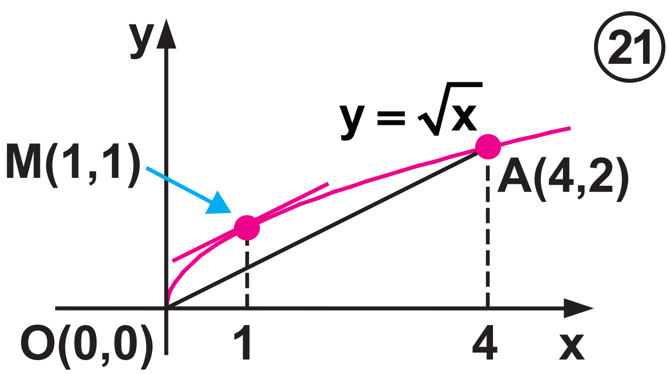
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση
$f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,4]$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,4] και παραγωγίσιμη στο (0,4), με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0,4)$ τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Για την εύρεση του αριθμού ξ, έχουμε:

$$f'(\xi)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{\xi}=1\Leftrightarrow \xi=1.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^3+x^2-(\lambda+1)x,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [0,1].

ii) Η εξίσωση $3\lambda x^2+2x-(\lambda+1)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0,1).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [0,1] αφού

- είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με

$f'(x)=3\lambda x^2+2x-(\lambda+1)$ και

- ισχύει $f(0)=f(1)=0$.

ii) Αφού, λοιπόν, για τη συνάρτηση $f(x)=\lambda x^3+x^2-(\lambda+1)x,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, θα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ ή, ισοδύναμα, $3\lambda\xi^2+2\xi-(\lambda+1)=0$. Επομένως, το $\xi\in(0,1)$ θα είναι ρίζα της εξίσωσης $3\lambda x^2+2x-(\lambda+1)=0$.

2. **Να αποδειχτεί ότι για τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+$ $+\gamma$, $\alpha\neq 0$ και για οποιοδήποτε διάστημα $[x_1,\ x_2]$, ο αριθμός $x_0\in(x_1,x_2)$, που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, είναι το κέντρο του διαστήματος $[x_1,\ x_2]$, δηλαδή είναι $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι συνεχής στο $[x_1,\ x_2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(x_1,\ x_2)$, με $f'(x)=2\alpha x+\beta$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$, τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Είναι όμως:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma-\alpha x_1^2-\beta x_1-\gamma}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{\alpha(x_2-x_1)(x_2+x_1)+\beta(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{(x_2-x_1)[\alpha(x_1+x_2)+\beta]}{x_2-x_1}=\alpha(x_1+x_2)+\beta.$$

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$2\alpha x_0+\beta=\alpha(x_1+x_2)+\beta \Leftrightarrow x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

3. **Ένα αυτοκίνητο διήνυσε μία διαδρομή 200 χιλιομέτρων σε 2,5 ώρες. Να αποδειχθεί ότι κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν 80 χιλιόμετρα την ώρα.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x = S(t)$, $t \in [0, 2{,}5]$ η συνάρτηση θέσης του κινητού. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $t_0 \in [0, 2{,}5]$, τέτοια ώστε $\upsilon(t_0) = S'(t_0) = 80$.

Η συνάρτηση S είναι συνεχής στο [0, 2,5] και παραγωγίσιμη στο (0, 2,5). Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $t_0 \in (0, 2{,}5)$ τέτοιο, ώστε

$$\upsilon(t_0) = S'(t_0) = \frac{S(2{,}5) - S(0)}{2{,}5} = \frac{200 - 0}{2{,}5} = 80 \text{ χλμ. την ώρα.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

   i) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $[0, 2]$

   ii) $f(x) = ημ3x$, $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

   iii) $f(x) = 1 + συν2x$, $[0, \pi]$

   iv) $f(x) = |x|$, $[-1, 1]$.

2. Να εξετάσετε, ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

i) $f(x) = x^2 + 2x$, $[0, 4]$ ii) $f(x) = 3\eta\mu 2x$, $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

iii) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & , \quad x \leq -1 \\ x^3 - x & , \quad x > -1 \end{cases}$, $[-3, 2]$

3. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και στη συνέχεια ότι:

$$e^{\alpha} < \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} < e^{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}.$$

Για τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$ υποθέτουμε επιπλέον ότι $0 < \alpha < \beta$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)ημx$.
Να αποδείξετε ότι:
   i) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.
   ii) Η εξίσωση $εφx=1-x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

3. i) Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.
   ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημ\frac{x}{2}=x$ αληθεύει μόνο για $x=0$.

4. i) Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leq\frac{1}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   ii) Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=\frac{x}{1+x^2}$, να αποδείξετε ότι για όλα τα $α,β\in\mathbb{R}$ ισχύει:
$$|f(β)-f(α)|\leq\frac{1}{2}|β-α|.$$

5. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,4]$ και ισχύει $2\leq f'(x)\leq 5$ για κάθε $x\in(0,4)$. Αν $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι $9\leq f(4)\leq 21$.

6. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και ισχύει $f'(x)\leq 1$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

Αν $f(-1)=-1$ και $f(1)=1$, να αποδείξετε ότι $f(0)=0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$.

7. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

   $f(x)=2^x$ και $g(x)=-x^2+2x+1$

   έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα Α(0,1), Β(1,2).

2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού θεωρείται μία από τις σπουδαιότερες προτάσεις της ανάλυσης, αφού με τη βοήθειά του αποδεικνύονται πολλά άλλα θεωρήματα. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θ.Μ.Τ. για να αποδείξουμε τα επόμενα δύο βασικά θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

● Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

● Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

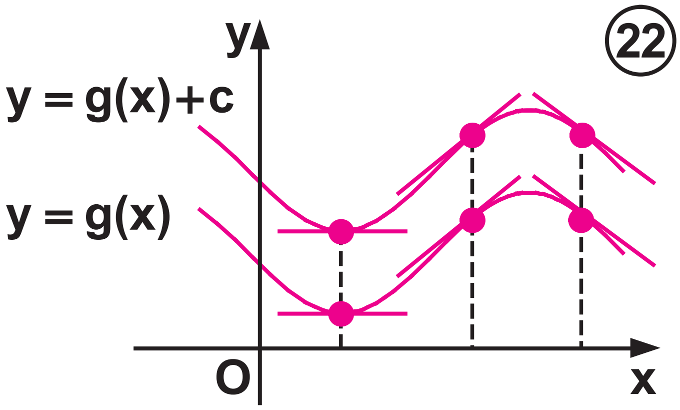
τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή και

ii) Να βρεθεί ο τύπος της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0) = 1$.

ΛΥΣΗ

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \overset{(1)}{=} 0,$$

Επομένως, η φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Επειδή η φ είναι σταθερή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, $\dfrac{f(x)}{e^x} = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως

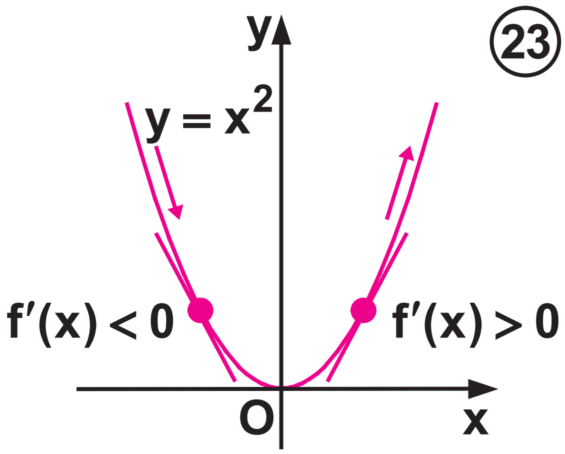
$$f(x) = ce^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0) = 1$, έχουμε $1 = c$, οπότε

$$f(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονοτονία συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(-\infty,0)$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $f'(x)=2x<0$, ενώ στο διάστημα $(0,+\infty)$, στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)=2x>0$.



Βλέπουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στη μονοτονία και στο πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ

> **Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.**
>
> - **Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
> - **Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

● **Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.**

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

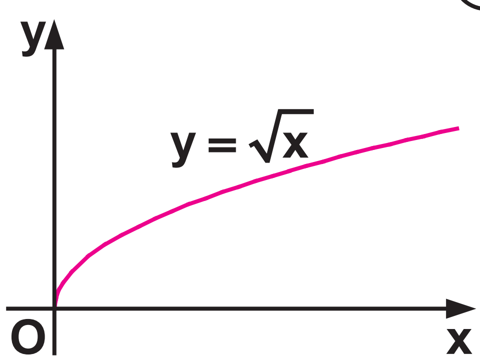
Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

● **Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.** ■

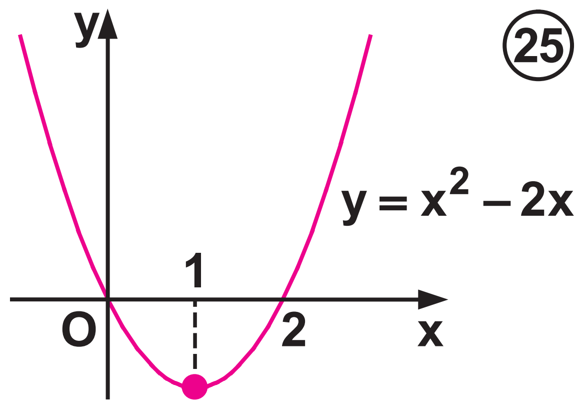
Για παράδειγμα:

— η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

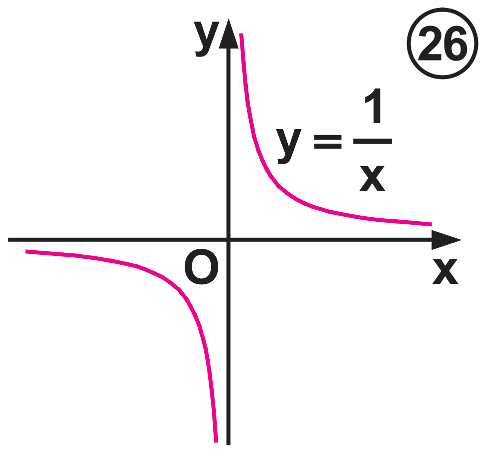
24



— η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)=2(x-1)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$ και $f'(x)=2(x-1)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$.



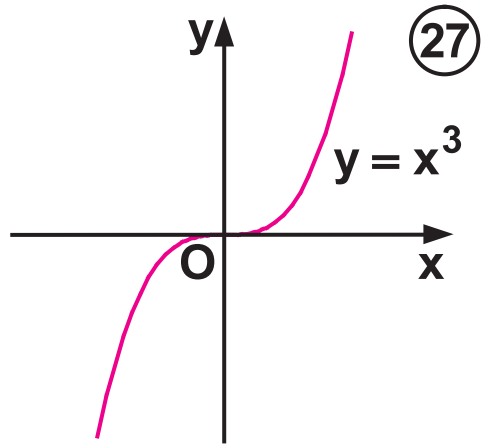
— η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, αφού $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$.



ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει.** Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+1$ είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=6x^2-6x=$
$=6x(x-1)$. Το πρόσημο της f' δίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως, η συνάρτηση f:

— είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και ισχύει $f'(x)>0$ στο $(-\infty,0]$.

— είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0,1)$.

— είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $[1,+\infty)$. Το πρόσημο της f' και το είδος μονοτονίας της f στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[0,1]$ και $[1,+\infty)$ συγκεντρώνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

2. i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f'(x) = x - \sigma\upsilon\nu x - 2$, $x \in [0,\pi]$ είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = x - 2$ έχει ακριβώς μια λύση στο $[0, \pi]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Είναι

$$f'(x) = (x - \sigma\upsilon\nu x - 2)' = 1 + \eta\mu x > 0, \text{ για κάθε } [0, \pi].$$

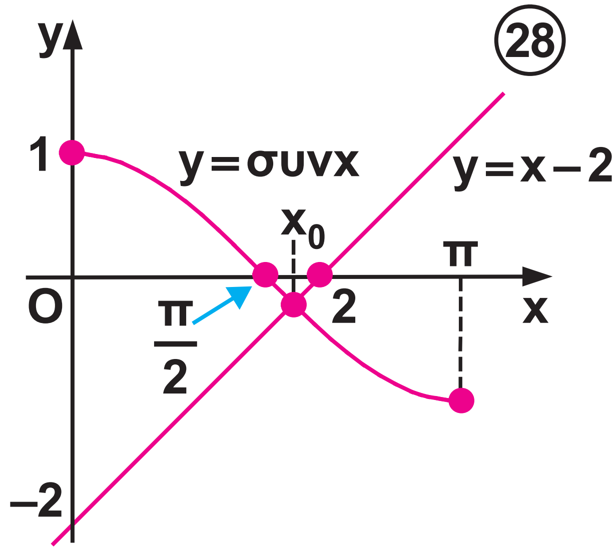
Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με την παράγραφο 1.8, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(0),f(\pi)] = [-3, \pi - 1]$.

ii) Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = x-2 \Leftrightarrow x-\sigma\upsilon\nu x-2=0,$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0,\ x\in[0,\pi].$$

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-3, \pi-1]$, που περιέχει το 0, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,\pi)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο διάστημα αυτό. Η ρίζα αυτή, όπως φαίνεται και στο σχήμα 28, είναι η τετμημένη του σημείου τομής της $y=x-2$ και της $y=\sigma\upsilon\nu x$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

$$f'(x)=g(x) \text{ και } g'(x)=-f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=[f(x)]^2+[g(x)]^2$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^3+3x-4$ ii) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$

iii) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

3. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & , \quad x\leq 1\\ x+2 & , \quad x>1\end{cases}$ ii) $f(x)=|x^2-1|$

4. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ ii) $f(x)=\ln x-x$

iii) $f(x)=\eta\mu x+|\eta\mu x|,\ x\in[0,2\pi]$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^5+5x-6$ και $g(x)=2\sqrt{x}+x-3$.

i) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$x^5+5x-6=0 \text{ και } 2\sqrt{x}+x-3=0$$

έχουν ακριβώς μία ρίζα την $x=1$.

6. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=e^x-1+\ln(x+1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \text{ για όλα τα } x, y \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

2. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + {}$ $+\, \alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1,1]$.

iii) Αν $-2 < \alpha < 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

3. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x = S(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 160, \; 0 \leq t \leq 5.$$

Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

i) Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;

ii) Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;

iii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;

4. Η τιμή V (σε ευρώ) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο

$$V = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}.$$

Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται χωρίς, όμως, η τιμή του να μπορεί να γίνει μικρότερη από το μισό της αρχικής τιμής του.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \alpha$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

7. Να αποδείξετε οτι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=ημx-xσυνx$ είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{π}{2}\right]$.

ii) $ημx-xσυνx>0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$.

iii) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{ημx}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0, \frac{π}{2}\right)$.

8. Να αποδείξετε ότι:

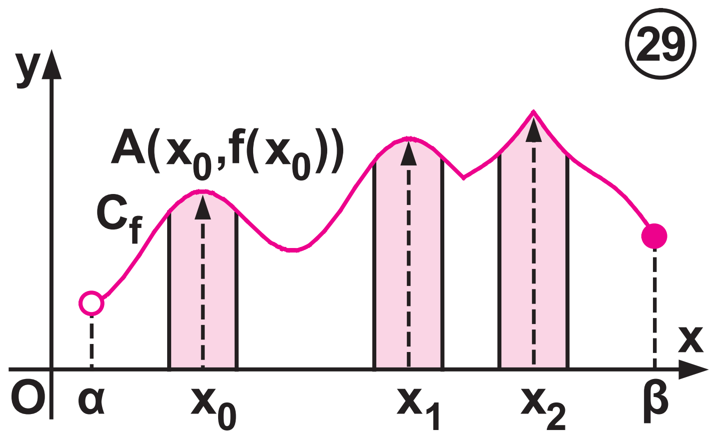
i) Η συνάρτηση $f(x)=2ημx+εφx-3x$, $x \in \left[0, \frac{π}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $2ημx+εφx \geq 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{π}{2}\right)$.

2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια του τοπικού ακροτάτου

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα (α, β]. Παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = x_0$ η τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε "γειτονικό" σημείο του x_0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία x_1 και x_2. Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:



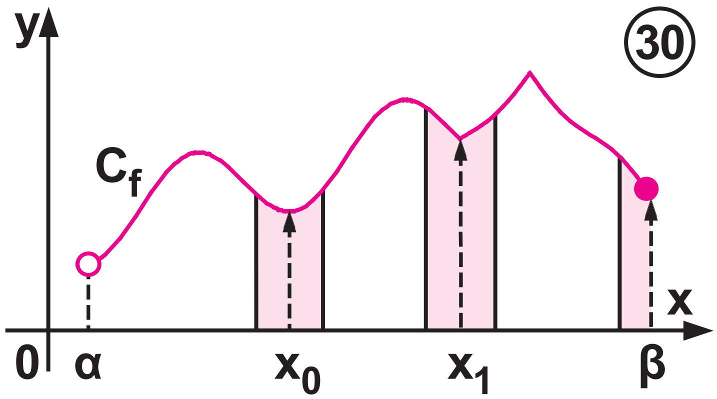
ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f.

Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $f(x_0)$.



Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = x_0$ η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε "γειτονικό" σημείο του x_0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία x_1 και β. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

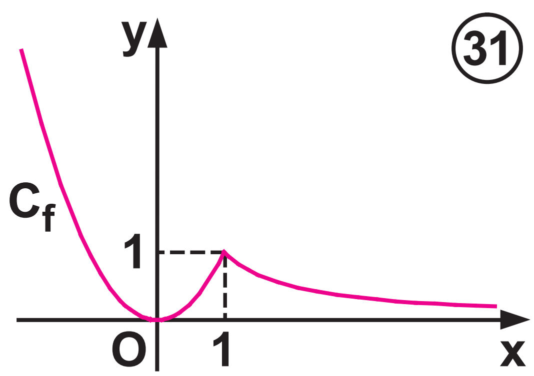
Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f.**

Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** ή, απλά, **ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \text{ αν } x>1 \end{cases}$$



παρουσιάζει:

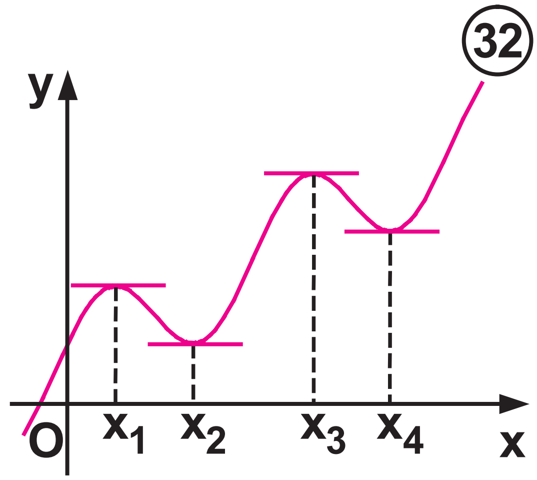
i) στο $x=0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(0)=0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο και

ii) στο $x=1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1)=1$.

Η συνάρτηση f αν και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, εντούτοις δεν παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο.

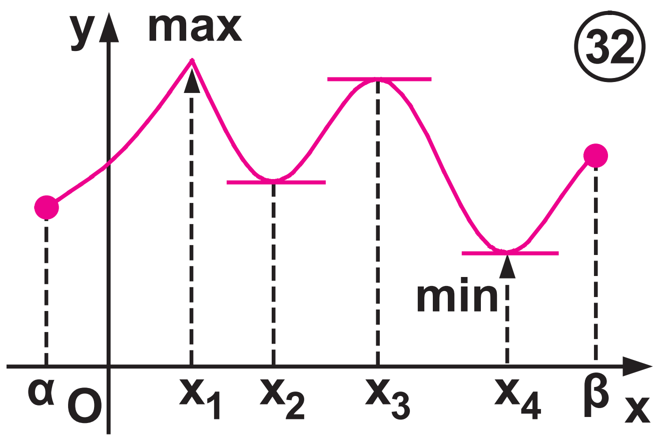
ΣΧΟΛΙΑ

i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



(α)

ii) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β).



(β)

Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συ-νάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων

Με μια προσεκτική παρατήρηση του σχήματος 32β βλέπουμε ότι αν σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια, δηλαδή ισχύει $f'(x_0)=0$. Αυτό επιβεβαιώνεται από το παρακάτω θεώρημα, που είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Fermat**.

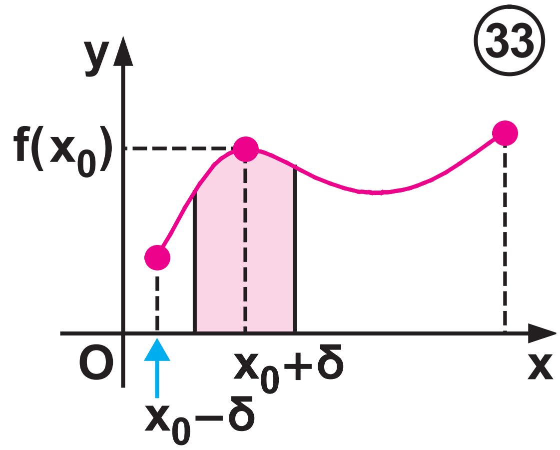
ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε



$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και

$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, όπως φαίνεται και στα σχήματα 29 και 30, οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**

2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**

3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

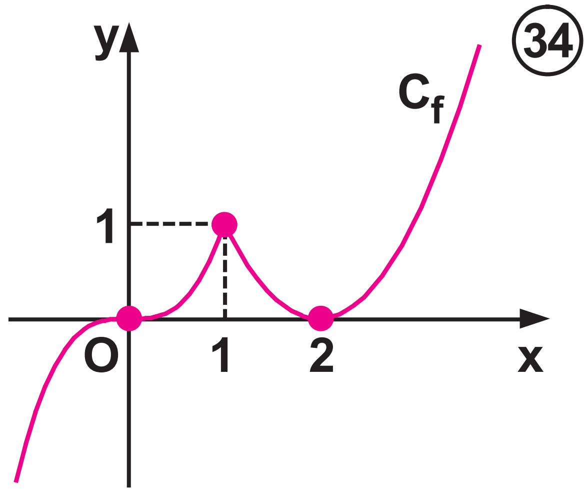
Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ (x-2)^2 & , \quad x \ge 1 \end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από το 1, με:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & , \quad x<1\\ 2(x-2) & , \quad x>1\end{cases}.$$

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2.



Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f. Επομένως, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο το οποίο να μας πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία της f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων αυτής. Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (Σχ. 35α)

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α, x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β). (Σχ. 35γ).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,\ x_0]$.

Έτσι έχουμε

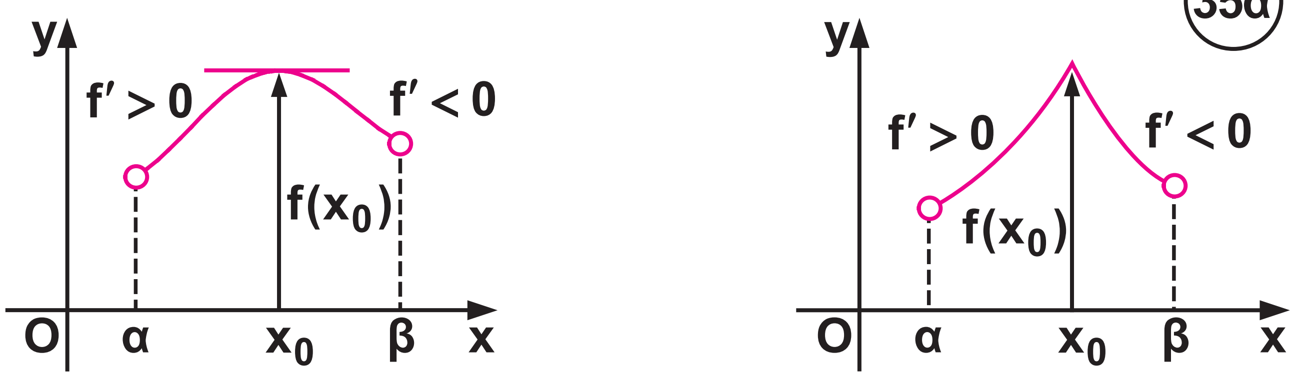
$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\ \beta)$.

Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \qquad (2)$$

35α



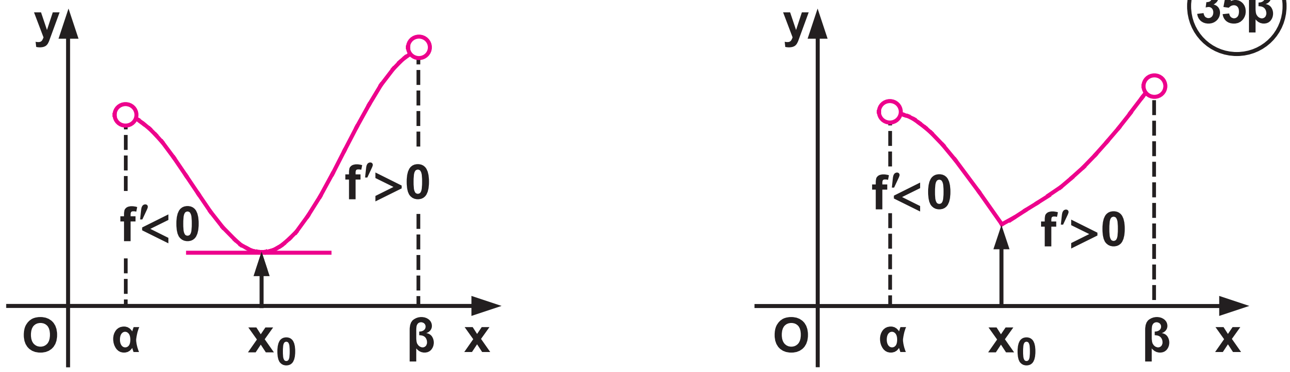
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο $(\alpha,\ \beta)$ και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

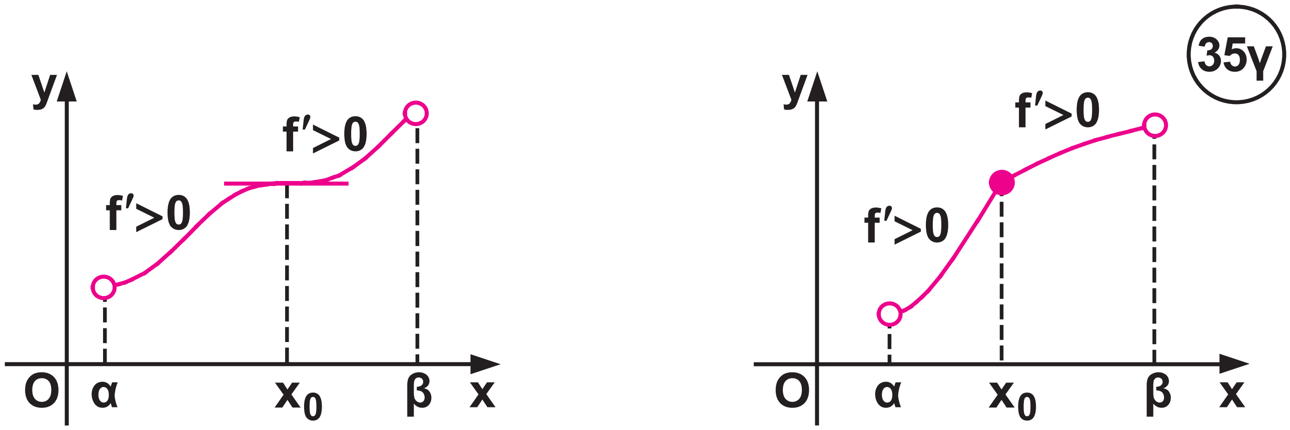
ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

35β



iii) Έστω ότι

$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3$ που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$f'(x)=4x^3-12x^2$. Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι $x=0$ (διπλή) ή $x=3$, το δε πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,3]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο για $x=3$, το $f(3)=-27$.

ΣΧΟΛΙΑ

● Όπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο (α, β), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f στο (α, β).

● Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα [α, β], όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8), η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+$ $+24x+19$, $x\in[0,5]$. Έχουμε $f'(x)=6x^2-30x+24$, $x\in[0,5]$. Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι $x=1$, $x=4$. Επομένως, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x=1$, $x=4$. Οι τιμές της f στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του διαστήματος [0, 5] είναι

$$f(1)=30,\ \ f(4)=3,\ \ f(0)=19 \ \text{ και } \ f(5)=14.$$

Άρα, η μέγιστη τιμή της f στο [0, 5] είναι ίση με 30 και παρουσιάζεται για $x=1$, ενώ η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και παρουσιάζεται για $x=4$.

● Για να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα απαιτείται να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0. Όταν ο προσδιορισμός αυτός δεν είναι εύκολος ή είναι αδύνατος, τότε το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μπορεί να μας πληροφορήσει αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και x_0 ένα σημείο του (α, β) στο οποίο η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

● Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.

● Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)>0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x)=x+2\text{συν}x,\ x\in(0,2\pi)$.

Έχουμε

$f'(x)=1-2\text{ημ}x$ και $f''(x)=-2\text{συν}x$,

οπότε οι ρίζες της f' είναι οι $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{5\pi}{6}$.

Για $x=\dfrac{\pi}{6}$, είναι $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$, ενώ για $x=\dfrac{5\pi}{6}$, είναι $f''\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}>0$.

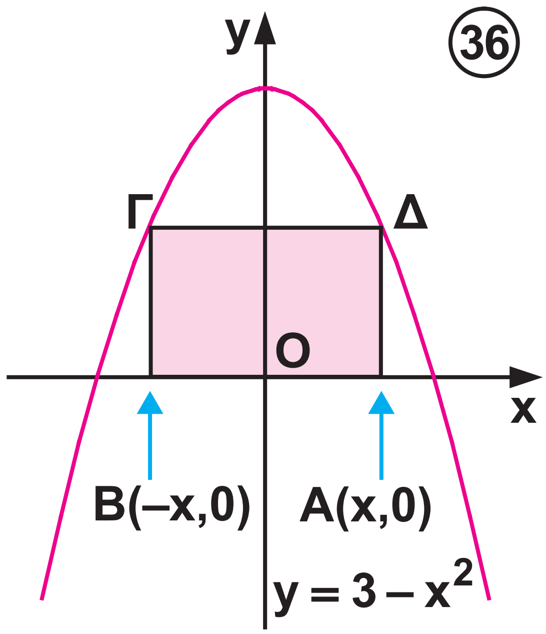
Έτσι έχουμε

α) $f'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=0$ και $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<0$, οπότε το $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

β) $f'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=0$ και $f''\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)>0$, οπότε το $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

36



1. **Να βρεθεί το $x\in[0,\sqrt{3}]$ έτσι, ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος να έχει μέγιστο εμβαδό.**

ΛΥΣΗ

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$E(x)=(AB)(A\Delta)=2x(3-x^2)=$
$=-2x^3+6x.$

Έχουμε $E'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$. Οι ρίζες της $E'(x)=0$ είναι οι $x=-1$, $x=1$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της Ε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

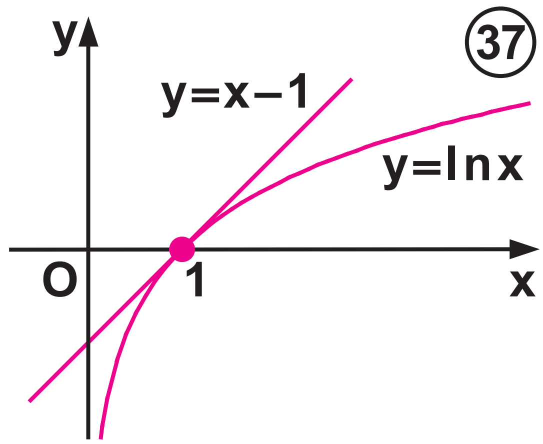
x	0		1		$\sqrt{3}$
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$	0 min	$\nearrow$	4 max	$\searrow$	0 min

Άρα, η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν $x = 1$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \ln x$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδειχτεί ότι $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.



ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x = 1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

ii) Επειδή η f για $x = 1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln x \leq x - 1.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 1$.

3. Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης Π(x), σε ευρώ, κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $\Pi(x) = 40000 - 6x$. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 4000 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 1200 ευρώ για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

ΛΥΣΗ

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων παραγωγής είναι

$$E(x) = x\Pi(x) = x(40000 - 6x) = -6x^2 + 40000x.$$

Το κόστος από την παραγωγή x μονάδων είναι

$$K(x) = 4000x.$$

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι:

$$K_{ολ}(x) = 4000x + 1200x = 5200x.$$

Επομένως, το κέρδος της βιομηχανίας είναι

$$\begin{aligned} P(x) &= E(x) - K_{ολ}(x) = \\ &= -6x^2 + 40000x - 5200x = \\ &= -6x^2 + 34800x. \end{aligned}$$

Έχουμε $P'(x) = -12x + 34800$, οπότε η $P'(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = 2900$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της P στο $(0,+\infty)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		2900		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		↗	50460 max	↘	

Επομένως, το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2900 μονάδες από το προϊόν αυτό και είναι ίσο με 50460 χιλιάδες ευρώ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι

$$f'(x)=3(x-1)^3(x-2)^2(x-3).$$

Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;

2. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$

ii) $g(x)=x^3-3x+2$

iii) $h(x)=2x^3-3x^2-1$.

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων:

$$x^3-3x^2+3x+1=0,\quad x^3-3x+2=0,$$

$$2x^3-3x^2-1=0.$$

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 &, \ x\le 1 \\ e^{1-x} &, \ x>1 \end{cases}$

ii) $g(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 &, \ x<1 \\ x^2-4x+3 &, \ x\ge 1 \end{cases}.$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

   i) $f(x)=e^x-x$ ii) $f(x)=x^x,\ x>0.$

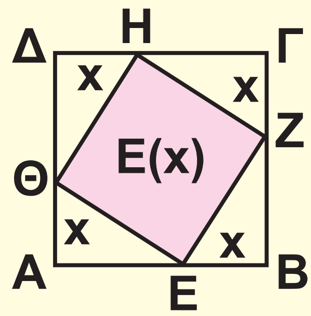
5. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x+1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=-1$ και $x_2=1$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

6. Να αποδείξετε ότι, από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδό 400 m^2, το τετράγωνο χρειάζεται τη μικρότερη περίφραξη.

7. Με συρματόπλεγμα μήκους 80 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

8. Μία ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x)=x^2-\dfrac{x^3}{4}$, $0<x<3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x, να γίνει μέγιστος.

9. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ,



i) να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

ii) να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν Ε(x) του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο.

10. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000 \text{ ευρώ},$$

για $0 \leq x \leq 105$, ενώ η είσπραξη από την πώληση των x μονάδων είναι $E(x) = 420x - 2x^2$ ευρώ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - x + 3$, $x \in [0, \pi]$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \pi)$.

2. i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x + 3$$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x\ln x \text{ και } h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

i) α) $e^x > 1 + x$

β) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

ii) α) $\sigma\upsilon\nu x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

β) $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$

iii) α) $(1 + x)^\nu > 1 + \nu x$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$

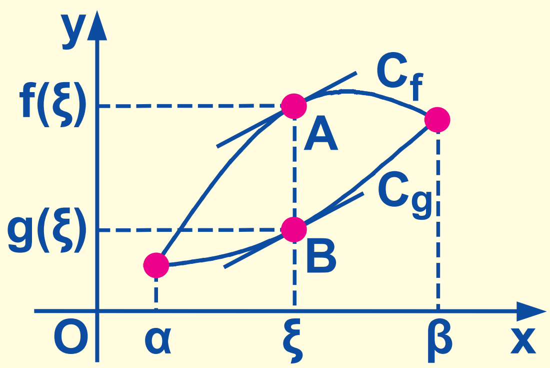
β) $(1 + x)^\nu > 1 + \nu x + \frac{\nu(\nu - 1)}{2}x^2$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$.

4. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1,$$

τότε η f δεν έχει ακρότατα.

5. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα [α, β]. Το σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή.



Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες.

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2, \text{ με } \alpha < \beta < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

7. Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

   i) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.

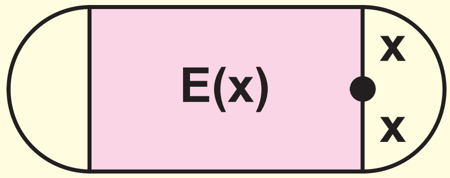
   ii) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2},0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

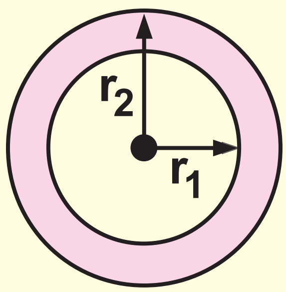
ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

9. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



10. Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα;

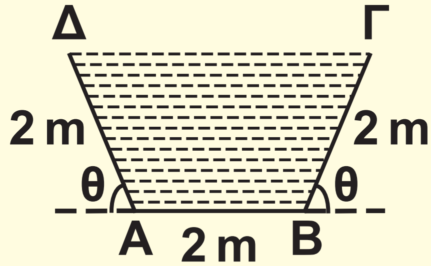
11. Έστω Ε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε οτι τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $r_1 = 3$ cm και $r_2 = 5$ cm και ότι για $t > 0$ η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05 cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s. Να βρείτε:



i) πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

ii) πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

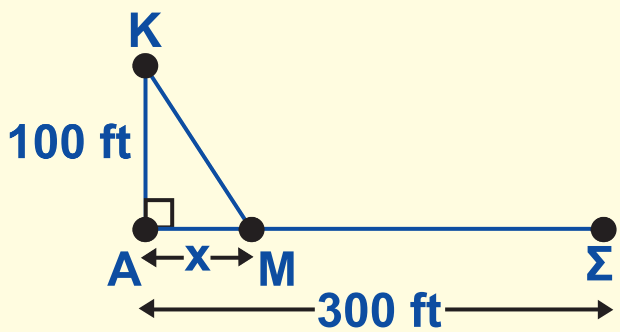
12. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με $E = 4ημθ(1 + συνθ)$

ii) Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

13. Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft[1] μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300 ft μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.



---

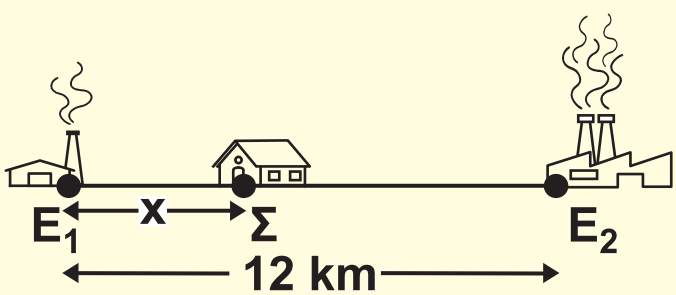
[1] 1 ft = 30,48cm

i) Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του παρακάτω σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$T(x)=\frac{\sqrt{100^2+x^2}}{3}+\frac{300-x}{5}.$$

ii) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

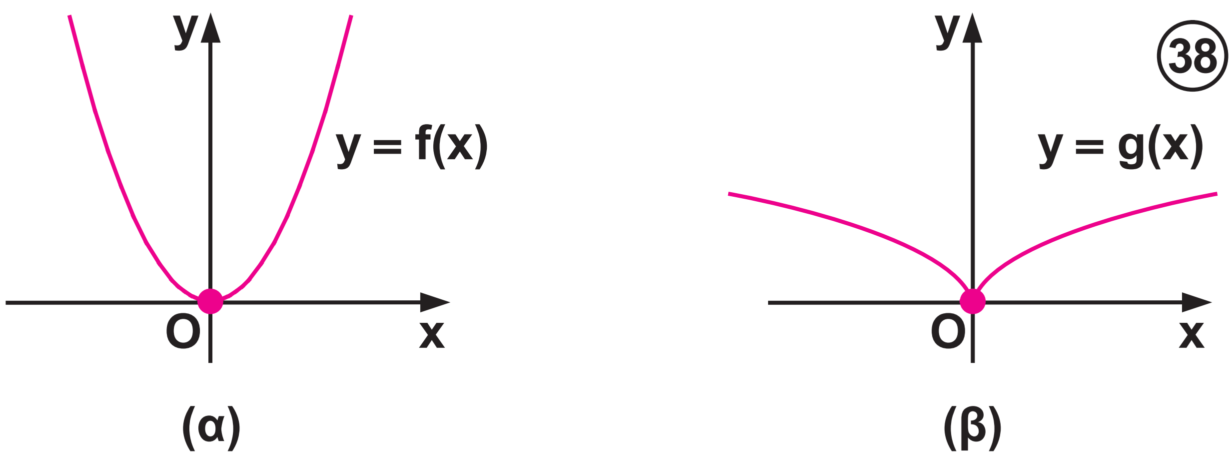
14. Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12 km και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και 8P αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d, να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).



2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Κοίλα - κυρτά συνάρτησης

• Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{|x|}$ (Σχ. 38).



Οι πληροφορίες τις οποίες μας δίνει η πρώτη παράγωγος για τη συμπεριφορά κάθε μιας από τις δύο συναρτήσεις, όπως φαίνεται και στο σχήμα 38 είναι ίδιες. Δηλαδή οι συναρτήσεις,

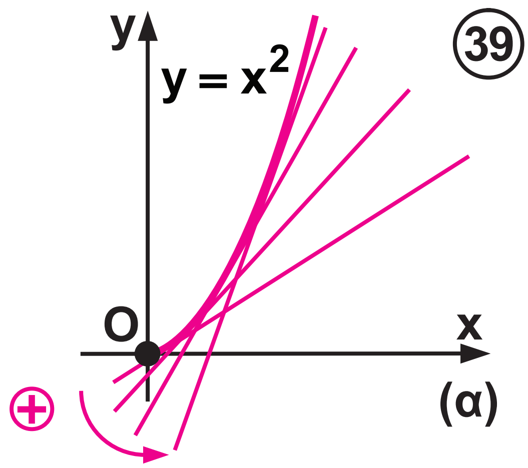
— είναι γνησίως φθίνουσες στο $(-\infty,0]$

— είναι γνησίως αύξουσες στο $[0,+\infty)$

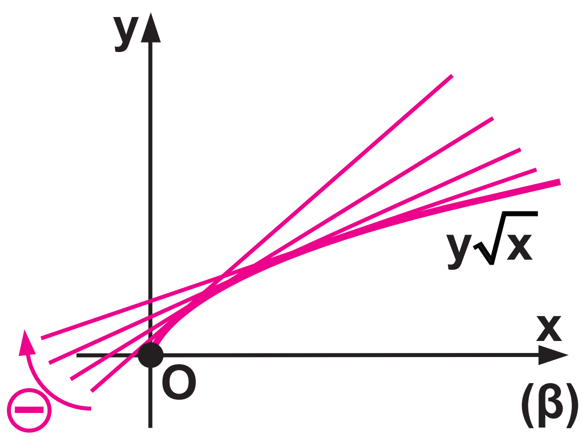
— παρουσιάζουν τοπικό ελάχιστο για $x=0$, το οποίο είναι ίσο με 0.

Όμως, οι συναρτήσεις αυτές έχουν διαφορετικές γραφικές παραστάσεις. Δηλαδή, “ανέρχονται” και “κατέρχονται” με διαφορετικό τρόπο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$. Επομένως, οι πληροφορίες που μας δίνει το πρόσημο της πρώτης παραγώγου δεν είναι ικανές για τη χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο διάστημα $[0, +\infty)$.



Καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά τη θετική φορά



Καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της C_g στρέφεται κατά την αρνητική φορά

Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται:

— η κλίση $f'(x)$ της C_f αυξάνεται, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, ενώ

— η κλίση της $g'(x)$ της C_g ελαττώνεται, δηλαδή η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $(0, +\infty)$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(0, +\infty)$. Γενικότερα, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

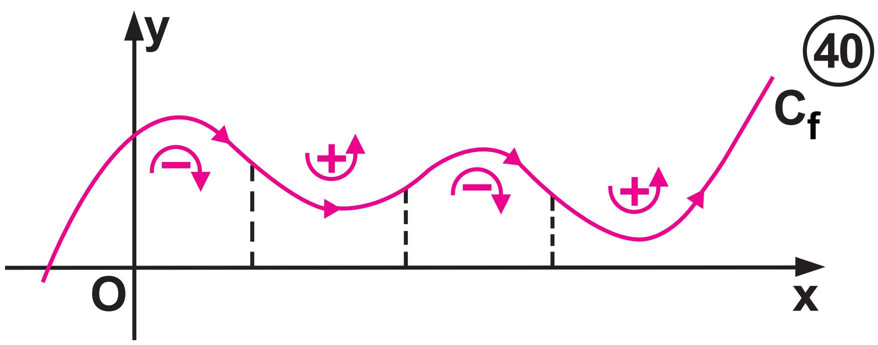
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

● Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

● Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά. (Σχ. 40)



Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό (αντιστοίχως).

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ’ ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

● Η μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά διευκολύνεται με τη βοήθεια του επόμενου θεωρήματος, που είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού και του θεωρήματος μονοτονίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

● Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

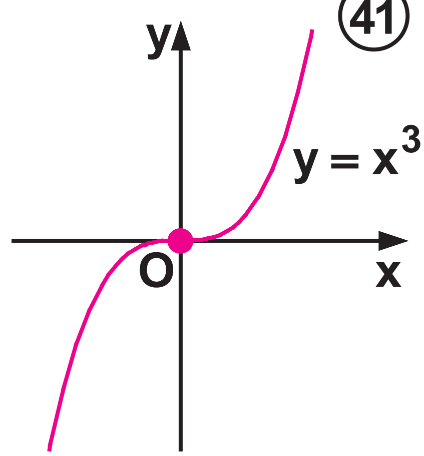
● Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$ (Σχ. 41),

— είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, αφού $f''(x) = 6x < 0$, για $x \in (-\infty, 0)$ και η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ ενώ,

— είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, αφού $f''(x) = 6x > 0$, για $x \in (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

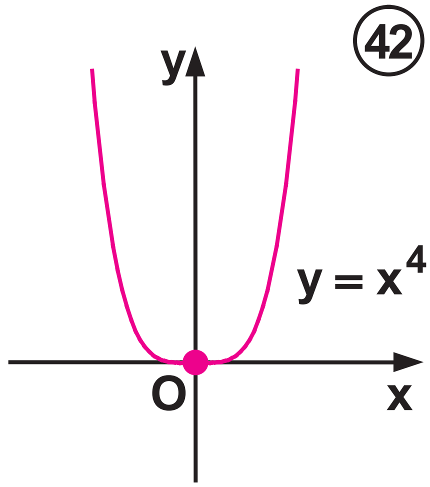
41



ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0)=0$.



Σημεία καμπής

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3$ (Σχ. 41) παρατηρούμε ότι,

(α) στο σημείο O(0, 0) η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη και

(β) εκατέρωθεν του $x_0=0$, η κυρτότητα της καμπύλης αλλάζει.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η γραφική παράσταση της f "κάμπτεται" στο σημείο O(0, 0). Το σημείο O λέγεται **σημείο καμπής της C_f**. Γενικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο $(α, x_0)$ και κοίλη στο $(x_0, β)$, ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη. Αποδεικνύεται, επιπλέον, ότι:

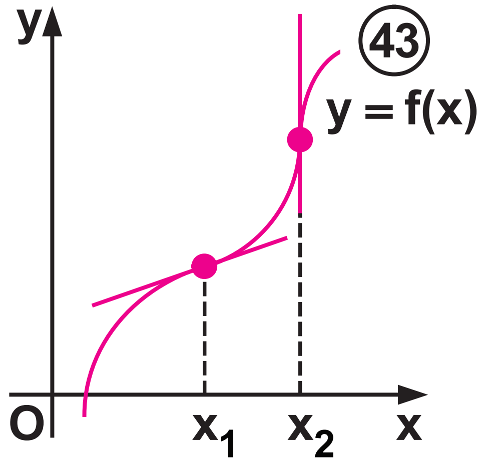
ΘΕΩΡΗΜΑ

> Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής. Επομένως, οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

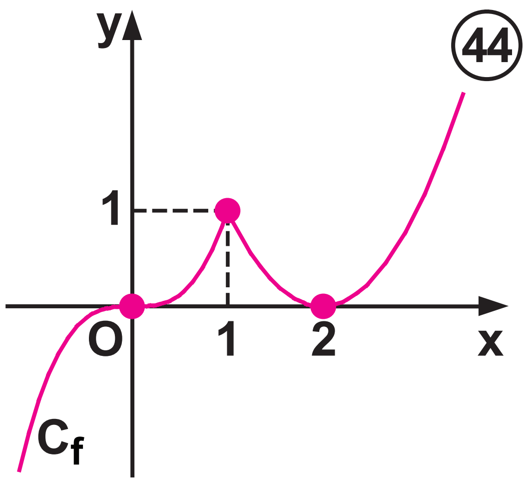
i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και

ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' (Σχ. 43).



Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<1 \\ (x-2)^4 & , \quad x\geq 1 \end{cases} \quad (\text{Σχ. } 44)$$



Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$ με

$$f''(x)=\begin{cases} 6x & , \quad x<1 \\ 12(x-2)^2 & , \quad x>1 \end{cases}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0 $+$	‖ $+$	0 $+$	
f(x)	κοίλη	κυρτή	κυρτή	κυρτή	

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο O(0, f(0)) υπάρχει εφαπτομένη της C_f και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής είναι μόνο το 0, εκατέρωθεν του οποίου η f'' αλλάζει πρόσημο. Γενικά:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν
- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να προσδιορισθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5,$$

είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) = 12(x-1)(x+1)$. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\smile$	0 Σ.Κ.	$\frown$	0 Σ.Κ.	$\smile$	

Επομένως, η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-1,1]$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία -1, 1 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$ είναι σημεία καμπής της C_f. Τα συμπεράσματα αυτά καταχωρούνται στην τελευταία γραμμή του παραπάνω πίνακα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων

   i) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$ ii) $g(x) = \dfrac{3x^2-2}{x^3}$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=xe^{1-x}$ ii) $g(x)=x^2(2\ln x-5)$

iii) $h(x)=\begin{cases}-3x^2+1 & , \ x<0 \\ -x^3+3x^2+1 & , \ x\geq 0\end{cases}$.

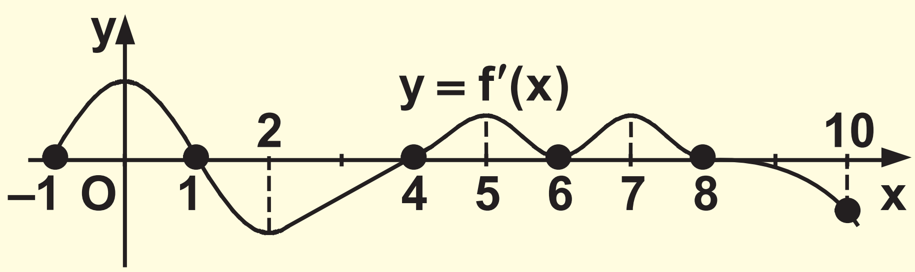
3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=e^{-x^2}$ ii) $g(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

iii) $h(x)=x\,|x|$ iv) $\varphi(x)=\sqrt{|x|}$

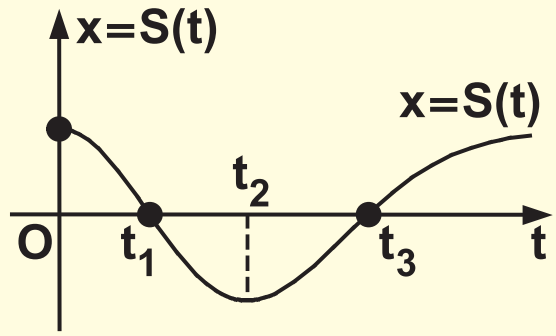
v) $\psi(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & , \ x<0 \\ \sqrt{x} & , \ x\geq 0\end{cases}$.

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα [–1,10].



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα.



Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:

i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

ii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2,2)$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

   i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

   ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

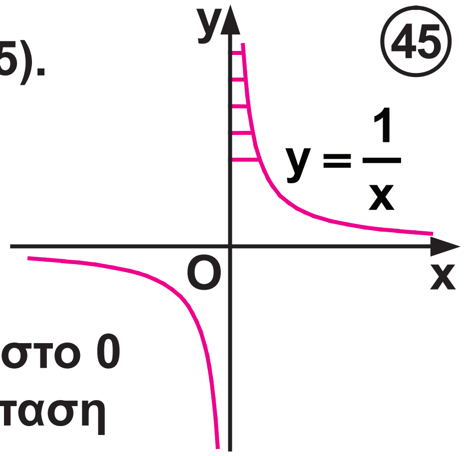
5. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο (–2,2), για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2\,f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Ασύμπτωτες



● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ (Σχ. 45).

Όπως είδαμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο 0 από θετικές τιμές, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ευθεία $x=0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $x=0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

> Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

● Για την ίδια συνάρτηση παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο $+\infty$, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ευθεία $y=0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y=0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο $-\infty$, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ευθεία $y = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$),

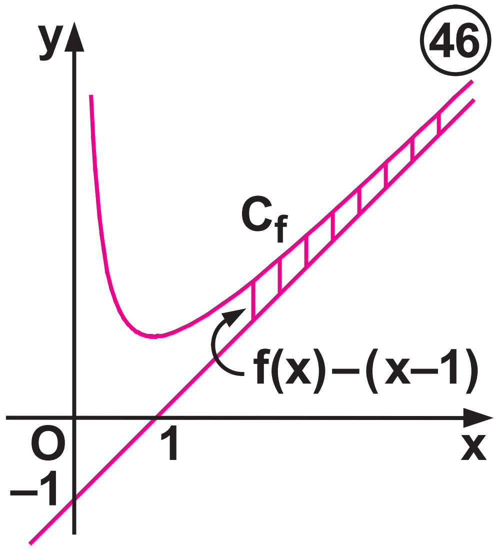
τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

● Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$$

και η ευθεία

$$g(x) = x - 1 \quad (\Sigma\chi.\ 46).$$



Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$,

καθώς το x τείνει στο $+\infty$, οι τιμές της f προσεγγίζουν τις τιμές της g. Δηλαδή, η γραφική παράσταση της f προσεγγίζει την ευθεία $y = x - 1$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι **ασύμπτωτη (πλάγια)** της C_f στο $+\infty$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

Η ασύμπτωτη $y=\lambda x+\beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda=0$, ενώ αν $\lambda\neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη. Για τον προσδιορισμό των ασυμπτώτων μιας συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R}.$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:
   — Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
   — Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:
   — Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
   — Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
   — Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=x+\frac{1}{x}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σ’ αυτό, θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0 και πλάγιες στο $-\infty$ και $+\infty$.

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty,$$

Άρα, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.
Εξετάζουμε, τώρα, αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1, \text{ οπότε } \lambda=1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

οπότε $\beta=0$.

Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$.

Κανόνες de L’ Hospital

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^3}$. Για να εξετάσουμε αν η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, χρειάζεται να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}. \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι, αν εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{0}{0}$. Οι μέθοδοι που εφαρμόσαμε στο κεφάλαιο του ορίου για την άρση της απροσδιοριστίας (απλοποίηση κτλ.) δεν εφαρμόζονται στο πιο πάνω όριο.

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα (η απόδειξή τους παραλείπεται), που είναι γνωστά ως κανόνες **de l’ Hospital.**

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο $\left(\text{μορφή} \dfrac{0}{0}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο),

τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Έτσι το παραπάνω όριο (1) υπολογίζεται ως εξής:
Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0, \ \lim_{x\to 0} x^3 = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3x^2} = +\infty$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3} = +\infty,$$

που σημαίνει ότι η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο $\left(\text{μορφή}\ \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$

και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο),

τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x}$ γίνεται ως εξής:

Έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty.$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$.
2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}$.
Να αποδειχτεί ότι:

i) Η ευθεία $y=x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

ii) Η ευθεία $y=x-2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=0.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4e^x}{e^x+1}=\frac{-4\cdot 0}{0+1}=0.$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\left[4-\frac{4e^x}{e^x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0.$$

2. **Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης**

$$f(x)=\frac{x}{e^x}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Θα αναζητήσουμε, επομένως, ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

● Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί τα όρια $\lambda=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$, η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

• Για να είναι η $y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$,

αρκεί τα όρια $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - \lambda x]$

να είναι πραγματικοί αριθμοί. Έχουμε:

$\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ και

$$\beta = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} =$$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} \text{(Κανόνας De L' Hospital)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Άρα, η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

   i) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ ii) $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

   iii) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ iv) $f(x)=\begin{cases} x &, \ x\le 0 \\ \frac{1}{x} &, \ x>0 \end{cases}$.

2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

   i) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ ii) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

   i) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1}$ ii) $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$

   iii) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x^2}{x^4}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ και οι ευθείες ε_1: $y=-x-1$ και ε_2: $y=x+1$.
   Να αποδείξετε ότι
   i) Η ε_1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, ενώ η ε_2 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
   ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+2x+2>(x+1)^2\geq 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$.

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f όταν:

   i) $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}$ ii) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

3. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha & , \quad x\leq 0\\ e^{\beta x} & , \quad x>0\end{cases}$$

   να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x} & , \quad 0<x\neq 1\\ -1 & , \quad x=1\end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής   ii) $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} & , \text{ αν } \quad x\neq 1\\ 0 & , \text{ αν } \quad x=1\end{cases}$$

και

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & , \text{ αν } \quad x\leq 1\\ 1+\dfrac{\ln x}{x} & , \text{ αν } \quad x>1\end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, ενώ

ii) Η g είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x=0\\ (1-e^{-x})\ln x & , \quad x\in(0,1]\end{cases}.$$

i) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} x\ln x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Ο(0,0).

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη της συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ’ ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της f** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f.

ΣΧΟΛΙΟ

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι άρτια, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι περιττή, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T, τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους T.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 11.$$

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Οι ρίζες της f' είναι οι $x = 3$, $x = 0$ (διπλή) και το πρόσημό της δίνονται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	-16 Τ.Ε.	$\nearrow$	

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

Οι ρίζες της f'' είναι οι $x = 0$, $x = 2$ και το πρόσημό της δίνονται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\smile$	11 Σ.Κ.	$\frown$	-5 Σ.Κ.	$\smile$	

4) Η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, αφού είναι πολυωνυμική τέταρτου βαθμού. Είναι όμως:

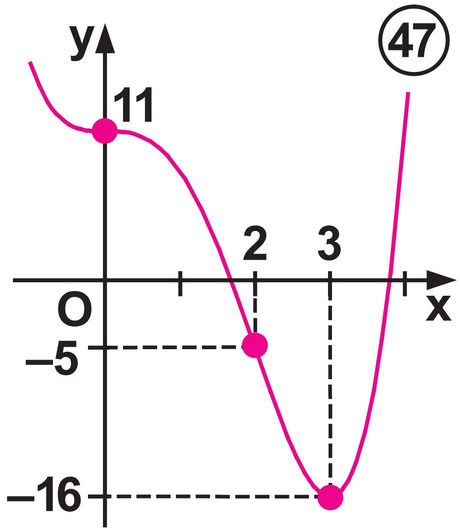
$$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 4x^3 + 11) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 4x^3 + 11) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty.$$

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	11 Σ.Κ.	↘	-5 Σ.Κ.	↘	-16 Τ.Ε.	↗	$+\infty$



2. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}.$$

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$.

2. Η f είναι συνεχής ως ρητή.

3. Έχουμε

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}\right)'=\frac{(2x-1)(x-1)-x^2+x-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

Οι ρίζες της f' είναι -1, 3 και το πρόσημό της δίνονται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-3 Τ.Μ.	↘	‖	↘	5 Τ.Ε.	↗	

Έχουμε επίσης

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}=\frac{8}{(x-1)^3}.$$

Η f'' δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της δίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$\frown$	‖	$\smile$	

4) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, η ευθεία $x = 1$

είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x^2 - x} = 1, \text{ οπότε } \lambda = 1$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 4}{x - 1} - x \right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0,$$

οπότε $\beta = 0$.

Επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

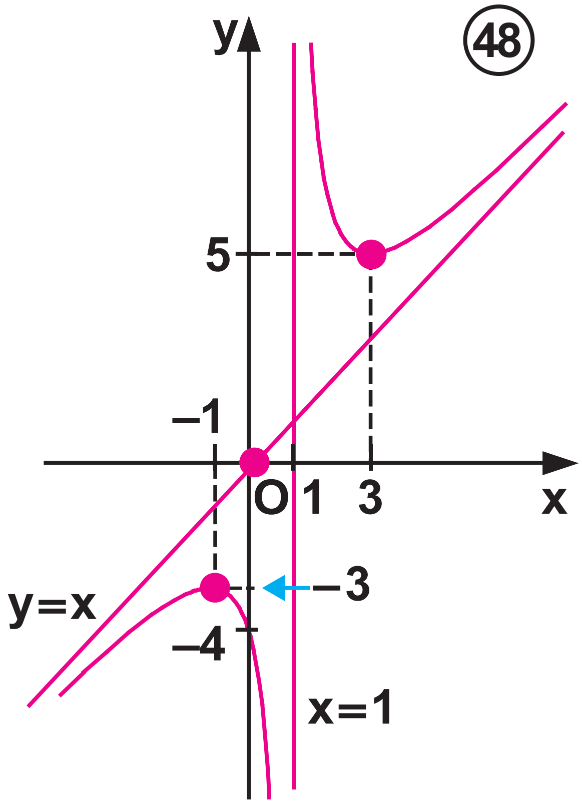
Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = -\infty$$

και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1} = +\infty$.

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f''(x)$		−		−	‖	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3 T.M.	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5 T.E.	↗	$+\infty$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

   i) $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$ ii) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

   iii) $f(x)=x^4-2x^2$.

2. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ii) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1}$.

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=x+ημx$ στο διάστημα $[-π, π]$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2-3x+3$, $x\in(0,+\infty)$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$.

   ii) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g στο διάστημα $(0,+\infty)$.

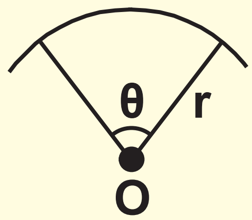
2. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $f(0)=g(0)$ και $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

   $f(x)<g(x)$ στο $(-\infty,0)$ και $f(x)>g(x)$ στο $(0,+\infty)$.

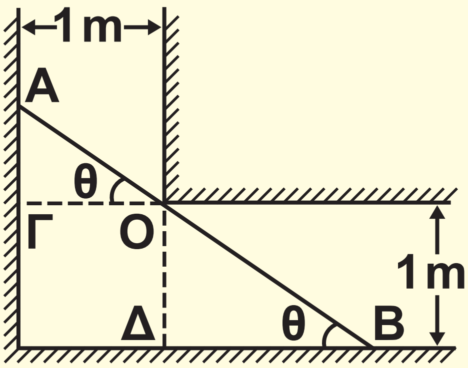
3. Ισοσκελές τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 1. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι $E=(1+συνθ)ημθ$. Να βρείτε την τιμή

της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$ για την οποία εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

4. Ένα σύρμα μήκους 20 m διατίθεται για την περίφραξη ενός ανθόκηπου σχήματος κυκλικού τομέα. Να βρείτε την ακτίνα r του κύκλου, αν επιθυμούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια του κήπου.



5. Δύο διάδρομοι πλάτους 1 m τέμνονται κάθετα (Σχήμα). Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία.



Υπόδειξη:

i) Να εκφράσετε τα OA, OB συναρτήσει της γωνίας θ, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $(AB) = \dfrac{1}{\eta\mu\theta} + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = f(\theta)$.

iii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ, για την οποία το ΑΒ γίνεται ελάχιστο.

6. i) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha}$ για κάθε $\alpha>e$.

iii) Να αποδείξετε ότι για $x>0$ ισχύει $2^x=x^2 \Leftrightarrow f(x)=f(2)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x=x^2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$, $x_2=4$.

7. i) Αν $\alpha, \beta>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x+\beta^x\geq 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=1$.

ii) Αν $\alpha>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x\geq x+1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

8. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι κυρτή, ενώ η $g(x)=\ln x$ είναι κοίλη.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και της C_g στο $B(1,0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

α) $e^x\geq x+1,\quad x\in\mathbb{R}$ β) $\ln x\leq x-1,\quad x\in(0,+\infty)$.

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

iv) Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

9. i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

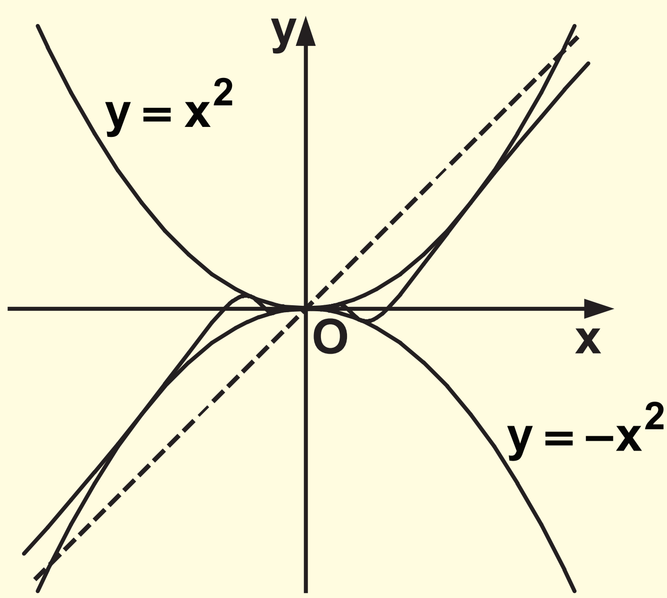
$$f(x) = e^x - \lambda x,\ \lambda > 0.$$

ii) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$e^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Για την τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.



Να αποδείξετε ότι

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι η ευθεία $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$.

ii) Ο άξονας $x'x$ έχει με την C_f άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της C_f.

iii) Η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

11. **Α.** Έστω μια συνάρτηση φ τέτοια, ώστε

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0 \text{ και } \varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \qquad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $\psi(x) = [\varphi'(x)]^2 + [\varphi(x)]^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

ii) $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Έστω δύο συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε:

$f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

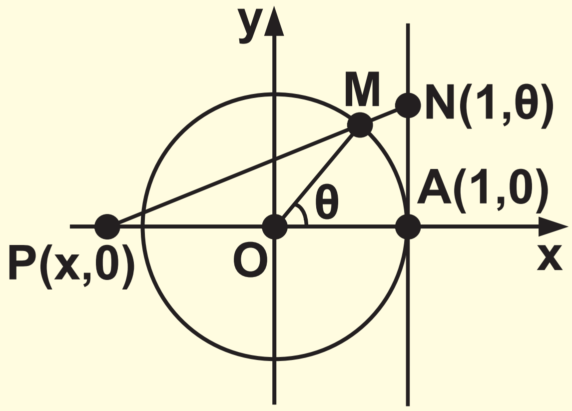
$g(0) = 1,\ g'(0) = 0$ και $g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Οι συναρτήσεις $\varphi(x) = f(x) - \eta\mu x$ και $\psi(x) = g(x) - \sigma\upsilon\nu x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος Α.

ii) $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

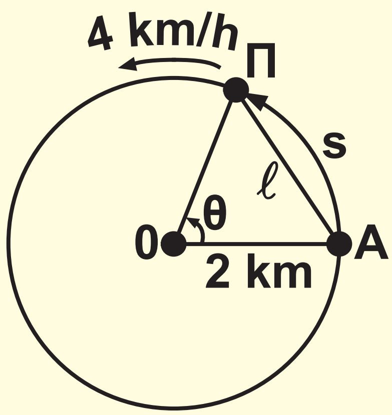
12. Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1 cm και η ε εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο Α.



Το τόξο ΑΜ είναι θ rad και το ευθ. τμήμα ΑΝ είναι θ cm. Η ευθεία ΜΝ τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο P(x, 0). Να δείξετε ότι:

i) $x = \dfrac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta} = x(\theta)$ ii) $\lim\limits_{\theta \to 0} x(\theta) = -2$.

13. Ένας πεζοπόρος Π ξεκινάει από ένα σημείο Α και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας ρ = 2 km με ταχύτητα υ = 4 km/h.



Αν S είναι το μήκος του τόξου ΑΠ και ℓ το μήκος της απόστασης ΑΠ του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιμή t:

Α) Να αποδείξετε ότι

i) $\theta = \frac{S}{2}$ και $\ell = 4\eta\mu\frac{\theta}{2}$, ii) $S = 4t$, $\theta = 2t$ και $\ell = 4\eta\mu t$.

Β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ℓ ως προς τον χρόνο t. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ℓ ως προς τον χρόνο t, όταν

α) $\theta = \frac{2\pi}{3}$, β) $\theta = \pi$ και γ) $\theta = \frac{4\pi}{3}$;

14. Ένας αγρότης θέλει να προσλάβει εργάτες για να μαζέψουν 12500 κιλά ντομάτες. Κάθε εργάτης μαζεύει 125 κιλά την ώρα και πληρώνεται 6 ευρώ την ώρα. Για το συντονισμό και επιστασία των εργατών ο αγρότης θα προσλάβει και έναν επιστάτη τον οποίο θα πληρώνει 10 ευρώ την ώρα. Ο αγρότης, επιπλέον, θα πληρώσει στο σωματείο των εργατών εισφορά 10 ευρώ για τον επιστάτη και κάθε εργάτη. Να βρείτε πόσους εργάτες πρέπει να προσλάβει ο αγρότης για να του κοστίσει το ελάχιστο δυνατόν και ποιο θα είναι το ελάχιστο κόστος.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$. — Α Ψ

2. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$. — Α Ψ

3. Αν οι f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες. — Α Ψ

4. Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

   α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f — Α Ψ

   β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f — Α Ψ

5. α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. — Α Ψ

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. **Α** **Ψ**

6. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. **Α** **Ψ**

7. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής. **Α** **Ψ**

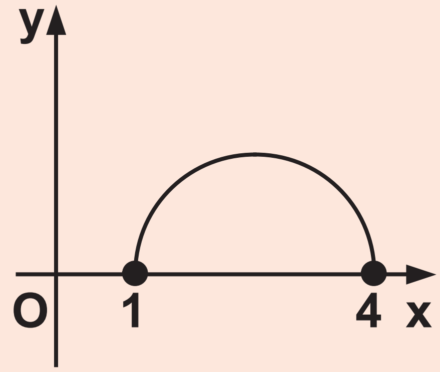
8. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x′x. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα x′x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. **Α** **Ψ**

9. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ **Α** **Ψ**

β) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$ **Α** **Ψ**

10. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:



i) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το (1,4) Α Ψ

ii) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το [1,4] Α Ψ

iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$ Α Ψ

iv) υπάρχει $x_0 \in (1,4) : f'(x_0) = 0$. Α Ψ

11. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει:

α) μια, τουλάχιστον, ρίζα στο (0,1) Α Ψ

β) μια, ακριβώς, ρίζα στο (–1,0) Α Ψ

γ) τρεις πραγματικές ρίζες Α Ψ

12. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν
$f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, $f'(5) = 6$, $g(0) = 5$,
$g'(0) = 1$, $g'(4) = 2$,
τότε $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$ Α Ψ

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)-\text{εφ}\dfrac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\dfrac{4}{3}$ Γ) $\sqrt{3}$ Δ) 0 E) $\dfrac{3}{4}$.

2. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

A) $\dfrac{1}{x^2}$ B) $-\dfrac{2}{x^2}$ Γ) $-\dfrac{1}{x^2}$ Δ) $-\dfrac{2}{x}$ E) 0

3. Αν $f(x)=5^{3x}$ τότε η $f'(x)$ ισούται με:

A) $3x5^{3x-1}$ B) $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ Γ) $3\cdot 5^{2x}$ Δ) $3\cdot 5^{3x}$

E) $5^{3x}\ln 125$

4. Αν $f(x)=\text{συν}^3(x+1)$ τότε η $f'(\pi)$ ισούται με:

A) $3\text{συν}^3(\pi+1)\text{ημ}(\pi+1)$ B) $3\text{συν}^2(\pi+1)$

Γ) $-3\text{συν}^2(\pi+1)\text{ημ}(\pi+1)$ Δ) $3\pi\text{συν}^2(\pi+1)$

5. Αν $f(x)=(x^2-1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α) 1 Β) –1 Γ) 0 Δ) 27

Ε) δεν υπάρχει.

6. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

Α) 0 Β) $\frac{1}{4}$ Γ) $\frac{1}{2}$ Δ) 1 Ε) 2.

7. Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:

Α) $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ Β) $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ Γ) $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$ Δ) $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ Ε) $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$.

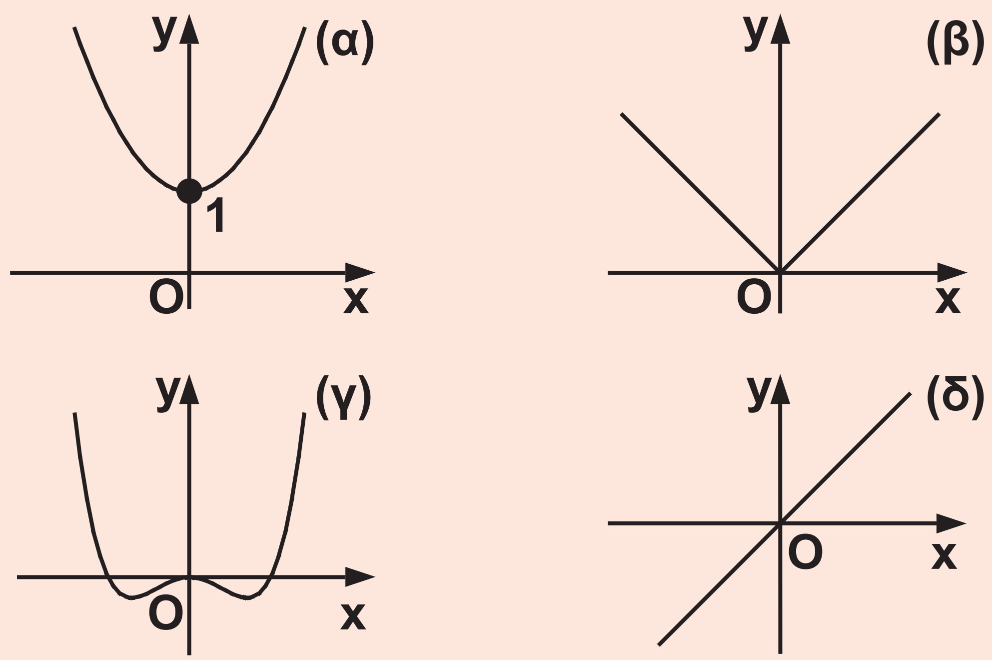
8. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε:

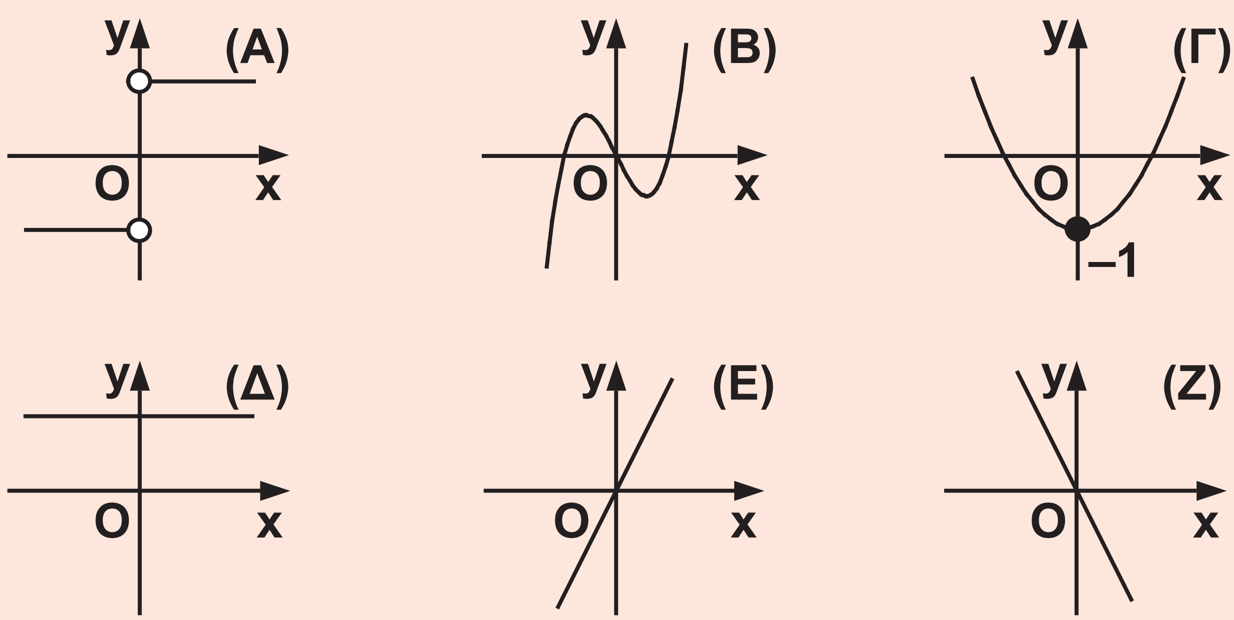
Α) $f(1)=-1$ Β) $f(-1)>0$

Γ) $f(1)>0$ Δ) $f(-1)=0$.

III.

1. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.





2. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ
1. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$	Α. $y = 2$
2. $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$	Β. $y = x - 1$
3. $f(x) = 2 + \frac{3}{x-2}$	Γ. $y = -x + 1$
	Δ. $y = x$
	Ε. $y = -x$

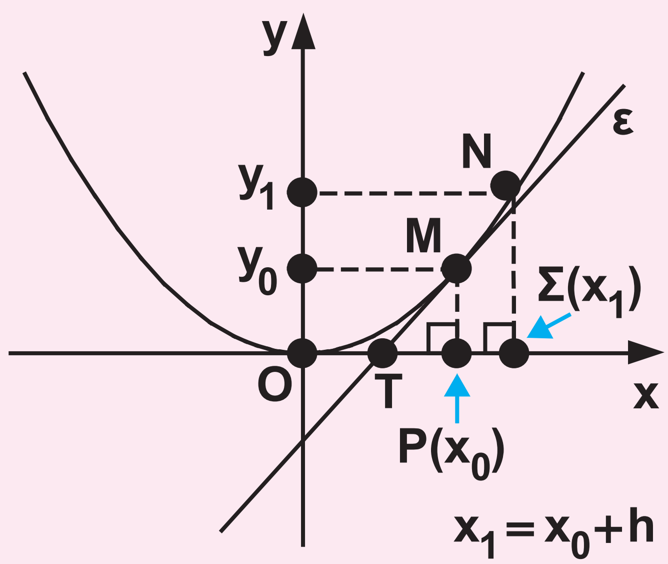
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια της παραγώγου

Οι αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν εφαπτομένη μιας καμπύλης την ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο μ' αυτήν, χωρίς να την τέμνει και την κατασκεύαζαν με βάση γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν απ' αυτόν τον ορισμό. Έτσι ήταν γνωστός ο τρόπος κατασκευής εφαπτομένων στον κύκλο και τις κωνικές τομές (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή). Επίσης, με προσφυγή σε κινηματικές μεθόδους, ο Αρχιμήδης είχε επινοήσει μέθοδο κατασκευής της εφαπτομένης μιας καμπύλης που είναι σήμερα γνωστή ως "έλικα του Αρχιμήδη".

Η επόμενη εξέλιξη στο ζήτημα αυτό έγινε στις αρχές του 17ου αιώνα, όταν άρχισε η συστηματική εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων στη γεωμετρία.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τον τρόπο με τον οποίο η Άλγεβρα εφαρμόζεται στον προσδιορισμό της εφαπτομένης μιας παραβολής.



Έστω $y = f(x) = x^2$ η εξίσωση μιας παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων και $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της, στο οποίο ζητείται να κατασκευαστεί μια εφαπτομένη ε. Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει αν προσδιορίσουμε ένα άλλο χαρακτηριστικό σημείο της ε, όπως π.χ. το σημείο Τ στο οποίο τέμνει τον άξονα των τετμημένων.

Θεωρούμε ένα άλλο σημείο της παραβολής, το $N(x_1, y_1)$, πολύ γειτονικό του Μ, τέτοιο ώστε $x_1 = x_0 + h$ (το h θεωρείται εδώ μια απειροελάχιστη μεταβολή του x_0). Στην περίπτωση αυτή τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΡΤ και ΝΣΤ μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση όμοια και άρα θα ισχύει κατά προσέγγιση η αναλογία $\frac{N\Sigma}{MP} = \frac{\Sigma T}{TP}$. Αν θέσουμε $TP = s$, τότε διαδοχικά θα ισχύει:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{s+h}{s} \quad \text{ή} \quad y_1 = y_0\left(1+\frac{h}{s}\right) \quad \text{ή} \quad y_1 - y_0 = y_0\frac{h}{s}$$

$$\text{ή} \quad \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{y_0}{s}. \ (1)$$

Το πρώτο μέλος αυτής της κατά προσέγγιση ισότητας γράφεται:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h$$

και έτσι η (1) γίνεται $2x_0 + h = \frac{y_0}{s}$. Αν τώρα θέσουμε, όπως οι μαθηματικοί του 17ου αιώνα, $h = 0$ βρίσκουμε από την τελευταία ότι $2x_0 = \frac{y_0}{s}$ ή $s = \frac{y_0}{2x_0}$.

Γνωρίζοντας λοιπόν το σημείο επαφής $M(x_0, y_0)$,

προσδιορίζουμε από την τελευταία το μήκος $TP = s$ που μας δίνει αμέσως το σημείο T. Η ευθεία MT είναι η ζητούμενη εφαπτομένη της παραβολής. Η προηγούμενη διαδικασία ήταν ένας από τους δρόμους που οδήγησαν ιστορικά, στην έννοια της παραγώγου.

Κανόνες παραγώγισης

Στο δεύτερο μισό του 17ου αιώνα, οι μαθηματικοί είχαν κατορθώσει να μετασχηματίσουν όλη τη μακροσκελή διαδικασία παραγώγισης σε εφαρμογή ορισμένων κανόνων και τύπων, με τη βοήθεια κατάλληλα επιλεγμένων συμβόλων. Πρωτοπόροι προς αυτήν την κατεύθυνση υπήρξαν οι I. Newton και ο G. Leibniz. O Leibniz συμβόλιζε την απειροελάχιστη μεταβολή μιας ποσότητας x με dx (διαφορικό του x). έτσι, π.χ. για τη συνάρτηση $y = x^2$ του προηγούμενου παραδείγματος, η αντίστοιχη μεταβολή του y (διαφορικό του y) ήταν:

$$dy = d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2 =$$
$$= 2xdx + (dx)^2.$$

Παραλείποντας την πολύ μικρή (συγκρινόμενη με τις άλλες) ποσότητα $(dx)^2$ προέκυπτε η $dy = 2xdx$

(εδώ η παράγωγος 2x ονομάζονταν “διαφορικός συντελεστής”) και τελικά η $\frac{dy}{dx} = 2x$, ένας συμβολισμός που διατηρείται μέχρι σήμερα, χωρίς όμως να έχει νόημα πηλίκου. Με τον τρόπο αυτό ο Leibniz απέδειξε το 1677 τον κανόνα για τον υπολογισμό της μεταβολής του γινομένου δύο μεταβλητών x και y, που αποτελεί μια “πρωτόγονη” μορφή του σημερινού κανόνα της παραγώγου ενός γινομένου συναρτήσεων

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy = \\ &= xy + xdy + ydx + dxdy - xy = \\ &= xdy + ydx + dxdy. \end{aligned}$$

Παραλείποντας και εδώ την πολύ μικρή ποσότητα dxdy, παίρνουμε τη σχέση

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Με την εισαγωγή και καθιέρωση αυτών των κανόνων και συμβολισμών, η έννοια της παραγώγου εξελίχθηκε σ’ ένα εξαιρετικά αποτελεσματικό εργαλείο και διεύρυνε σε μεγάλο βαθμό τις εφαρμογές της μαθηματικής ανάλυσης. Παράλληλα όμως, οι ασάφειες που επισημάναμε αποτελούσαν μια διαρκή πρόκληση για τους μαθηματικούς που αντιμετώπιζαν με κριτικό πνεύμα τα θεμέλια της επιστήμης τους. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός αυτής της έννοιας, που στηρίζεται στην έννοια του ορίου, δόθηκε για πρώτη φορά το 1823 από τον A.L. Cauchy:

" Όταν η συνάρτηση $y=f(x)$ παραμένει συνεχής σ' ένα διάστημα της μεταβλητής x και δοθεί σ' αυτή τη μεταβλητή μια τιμή που ανήκει σ' αυτό το διάστημα, τότε κάθε απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει μια απειροελάχιστη αύξηση της συνάρτησης.

Συνεπώς, αν τεθεί $\Delta x = i$, τότε οι δυο όροι του πηλίκου διαφορών

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

θα είναι απειροελάχιστες ποσότητες. Αλλά ενώ αυτοί οι δυο όροι θα προσεγγίζουν επ' άπειρον και ταυτόχρονα το όριο μηδέν, το πηλίκο μπορεί να συγκλίνει προς κάποιο άλλο όριο, θετικό ή αρνητικό.
Αυτό το όριο, όταν υπάρχει έχει μια ορισμένη τιμή για κάθε συγκεκριμένο x, αλλά μεταβάλλεται μαζί με το x. Η μορφή της νέας συνάρτησης που θα εκφράζει το όριο του λόγου

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

θα εξαρτάται από τη μορφή της δοσμένης συνάρτησης $y=f(x)$.
Για να ξεχωρίσουμε αυτήν την εξάρτηση, δίνουμε στη νέα συνάρτηση το όνομα **παράγωγος συνάρτηση** και τη συμβολίζουμε, με τη βοήθεια ενός τόνου, y' ή $f'(x)$".
Με αφετηρία αυτόν τον ορισμό, ο Cauchy υπολόγισε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και

απέδειξε τους κανόνες της παραγώγισης. Π.χ. για τον ιδιαίτερα σημαντικό κανόνα της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης, έδωσε την ακόλουθη απόδειξη:
"Έστω z μια δεύτερη συνάρτηση του x, συνδεόμενη με την πρώτη $y = f(x)$ μέσω του τύπου $z = F(y)$.
Η z ή $F[f(x)]$ είναι αυτή που ονομάζεται συνάρτηση μιας συνάρτησης της μεταβλητής x και αν οι απειροελάχιστες και ταυτόχρονες αυξήσεις των x, y και z συμβολιστούν με Δx, Δy, Δz αντίστοιχα, τότε θα είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Από αυτήν, περνώντας στα όρια, έχουμε

$$z' = F'(y)\cdot y' = F'[f(x)]\cdot f'(x)\text{"}^{(*)}$$

(*) Ένα αδύνατο σημείο αυτής της απόδειξης, που αφορά την ισότητα (1), είναι ότι για μικρές, μη μηδενικές τιμές του Δx, μπορεί να ισχύει $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Διαφορικός Λογισμός — Σελ.

2.1	Η έννοια της παραγώγου	5
2.2	Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτηση	29
2.3	Κανόνες παραγώγισης	40
2.4	Ρυθμός μεταβολής	60
2.5	Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού	69
2.6	Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής	77
2.7	Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	91
2.8	Κυρτότητα - σημεία καμπής συνάρτησης	114
2.9	Ασύμπτωτες - Κανόνες De L’ Hospital	126
2.10	Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης	139